

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Anton Bovier
*Institut für Angewandte Mathematik
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität
Endenicher Allee 60
53115 Bonn*

Version vom 31. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Wahrscheinlichkeit	<i>page</i> 1
1.1	Zufallsexperimente und Glücksspiele	2
1.2	Allgemeine Eigenschaften von Bewertungen.	4
1.3	Faire Bewertungen und Wahrscheinlichkeitsmaße.	7
1.4	Die Gleichverteilung.	9
1.5	Wahrscheinlichkeit und Frequenz	10
1.6	Wahrscheinlichkeit und Information	13
1.7	Wahrscheinlichkeit und Versicherung.	14
2	Elemente der Maßtheorie	19
2.1	Wahrscheinlichkeitsmaße auf endlichen Mengen	19
2.1.1	Messbare Funktionen	21
2.1.2	Erwartungswerte und Risiko.	24
2.1.3	Erwartungswerte und Verteilungsfunktionen.	25
2.2	Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} .	25
2.2.1	Die Borel'sche σ -Algebra.	26
2.2.2	Maßbestimmende Mengen und Satz von Carathéodory.	28
2.2.3	Verteilungsfunktionen.	32
2.2.4	Integration	35
2.2.5	Abbildungen von Maßen	41
2.2.6	Beispiele von Wahrscheinlichkeitsmaßen.	42
2.2.7	Absolut stetige Maße. Wahrscheinlichkeitsdichten.	45
3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, Produktmaße	48
3.1	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	48
3.2	Unabhängige Zufallsvariablen	51

3.3	Produkt Räume	54
3.4	Der Satz von Fubini	58
3.5	Unendliche Produkte	61
3.6	Summen von unabhängigen Zufallsvariablen	63
3.6.1	Die Irrfahrt	64
3.6.2	Strategien 2. Optionspreise.	66
3.6.3	Das Ruin-Problem	69
3.6.4	Das Arcussinusgesetz	71
3.6.5	Faltungen	75
4	Konvergenzbegriffe	78
4.1	Konvergenz von Verteilungsfunktionen	78
4.2	Konvergenz von Zufallsvariablen	80
4.2.1	Konvergenz in Verteilung	80
4.2.2	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit	85
4.2.3	Fast sichere Konvergenz	85
4.2.4	Zusammenfassung	89
5	Das Gesetz der großen Zahlen.	93
5.1	Erwartungswert, Varianz, Momente	93
5.2	Chebychev's Ungleichung	95
5.3	Das Gesetz der großen Zahlen	97
5.3.1	Kolmogorov's Ungleichung	97
5.3.2	Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen	99
5.3.3	Schwächere Formulierungen	101
5.4	Anwendungen in der Statistik.	102
5.4.1	Statistische Modelle und Schätzer	102
5.4.2	Frequenzen	103
5.4.3	Schätzen von Erwartungswert und Varianz	105
6	Der zentrale Grenzwertsatz	109
6.1	Grenzwertsätze	109
6.2	Charakteristische Funktionen	110
6.3	Der zentrale Grenzwertsatz	117
6.4	Stabile Verteilungen	119
6.5	Parameterschätzung	120
6.5.1	Das Maximum-Likelihood Prinzip	121
7	Markov Prozesse	127
7.1	Definitionen	127
7.2	Markovketten mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten	130

7.3	Markovketten und Graphen. Klassifizierung der Zustände	135
7.4	Stoppzeiten und Anwendungen	143
7.4.1	Der starke Ergodensatz	146
7.4.2	Markovketten Monte-Carlo Verfahren.	147
7.5	Vorwärtsgleichungen, Eintrittswahrscheinlichkeiten und Zeiten.	149
	<i>Bibliography</i>	153
	<i>Index</i>	154