

V Integralrechnung

1 Integration als Umkehrung der Differentiation

Das *Grundproblem* der in Kapitel IV behandelten Differentialrechnung besteht in der Bestimmung der *Ableitung* einer vorgegebenen Funktion $y = f(x)$. Dieser Vorgang wird als *Differentiation* bezeichnet und lässt sich schematisch wie folgt darstellen:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{Differentiation}} y' = f'(x)$$

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen stellt sich aber auch häufig das *umgekehrte Problem*: Von einer zunächst noch *unbekannten* Funktion $y = f(x)$ ist die *Ableitung* $y' = f'(x)$ bekannt und die Funktion selbst ist zu bestimmen. *Die Aufgabe besteht also darin, von der gegebenen Ableitung auf die Funktion zu schließen*:

$$y' = f'(x) \longrightarrow y = f(x)$$

Auf ein solches Problem stößt man beispielsweise in der *Mechanik*, wenn von einer Bewegung das *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ bekannt ist und daraus dann das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ ermittelt werden soll. Denn bekanntlich ist die Geschwindigkeit die *1. Ableitung* des Weges nach der Zeit: $v = \dot{s}$ (siehe hierzu auch Kap. IV, Abschnitt 2.13.1). Auch hier soll also von der *bekannten* Ableitung $\dot{s}$ einer noch *unbekannten* Funktion $s = s(t)$ auf die Funktion selbst geschlossen werden:

$$\dot{s} = v(t) \longrightarrow s = s(t)$$

■ Beispiele

Auf Grund der Kenntnisse aus der Differentialrechnung lassen sich die folgenden Aufgaben leicht lösen.

(1) *Gegeben*: $y' = 1$

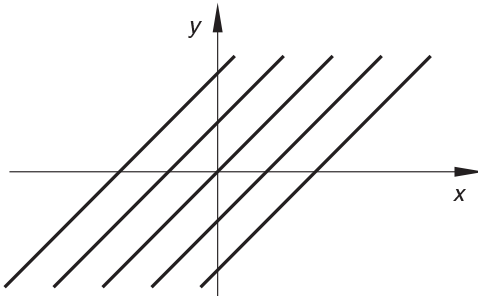
Gesucht: *Sämtliche* Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = 1$

Lösung: Jede lineare Funktion vom Typ $y = x + C$ ist wegen

$$y' = \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1$$

eine Lösung der gestellten Aufgabe (C : beliebige reelle Zahl). Es handelt sich dabei um die in Bild V-1 skizzierte *parallele Geradenschar*. Für jeden Wert des

Parameters C erhält man genau *eine* Gerade. Weitere Lösungen gibt es nicht.
Geometrische Bedeutung des Parameters C : Schnittstelle mit der y -Achse (Achsenabschnitt).

**Bild V-1**Geradenschar $y = x + C$

(2) Gegeben: $y' = 2x$

Gesucht: Sämtliche Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = 2x$

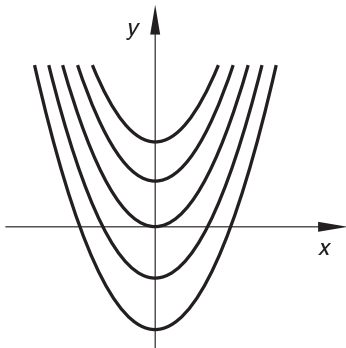
Lösung:

$$y = x^2 + C \quad (\text{Parabelschar, siehe Bild V-2})$$

Denn für jedes (reelle) C ist

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x + 0 = 2x$$

Geometrische Bedeutung des Parameters C : Er bestimmt die Lage des *Scheitelpunktes* auf der y -Achse.

**Bild V-2**Parabelschar $y = x^2 + C$

(3) **Bewegung einer Masse mit konstanter Beschleunigung a längs einer Geraden**

Aus dem als bekannt vorausgesetzten *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*, $v = at + v_0$ für $t \geq 0$ schließen wir wie folgt auf das *Weg-Zeit-Gesetz*:

$$v = \dot{s} = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C$$

($v_0 = v(t = 0)$): Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$). Denn es gilt:

$$\dot{s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + C \right) = \frac{1}{2} a \cdot 2t + v_0 + 0 = at + v_0$$

Die Konstante C ermitteln wir aus der Anfangslage $s(t = 0) = s_0$:

$$s(t = 0) = s_0 \Rightarrow \frac{1}{2} a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C = s_0 \Rightarrow C = s_0$$

Somit:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0 \quad (\text{für } t \geq 0) \quad \blacksquare$$

Wir nehmen noch folgende *Umbenennungen* vor:

$f(x)$: Vorgegebene 1. Ableitung einer (zunächst noch unbekannten) Funktion

$F(x)$: Jede Funktion mit der 1. Ableitung $F'(x) = f(x)$

Eine Funktion $F(x)$ mit dieser Eigenschaft wird als eine *Stammfunktion* von $f(x)$ bezeichnet.

Wir definieren daher:

Definition: Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ heißt eine *Stammfunktion* von $f(x)$, wenn

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{V-1})$$

gilt.

■ Beispiele

$$(1) \quad f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}; \text{Parabelschar aus Bild V-2})$$

Denn die 1. Ableitung von $F(x)$ ergibt genau $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (x^2 + C) = 2x + 0 = 2x = f(x)$$

$$(2) \quad f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Denn es ist:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (\sin x + C) = \cos x + 0 = \cos x = f(x)$$

$$(3) \quad f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = e^x + \arctan x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} (e^x + \arctan x + C) = e^x + \frac{1}{1+x^2} + 0 = \\ &= e^x + \frac{1}{1+x^2} = f(x) \end{aligned}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = \tan x + C \quad (C \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0)$$

Denn die erste Ableitung von $F(x)$ ergibt genau die Funktion $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (\tan x + C) = \frac{1}{\cos^2 x} + 0 = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x)$$

$$(5) \quad F(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \text{ ist eine Stammfunktion von } f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

denn es gilt (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = f(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Anhand dieser Beispiele lassen sich die *wesentlichen Eigenschaften der Stammfunktionen* erkennen. Wir fassen sie wie folgt zusammen:

Eigenschaften der Stammfunktionen

1. Es gibt zu jeder *stetigen* Funktion $f(x)$ *unendlich* viele Stammfunktionen.
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante:

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const.} \quad (\text{V-2})$$

3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher lässt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form

$$F(x) = F_1(x) + C \quad (\text{V-3})$$

darstellen (C ist dabei eine *beliebige reelle* Konstante).

Der zum Auffinden *sämtlicher* Stammfunktionen führende Prozess heißt *Integration*:

Definition: Das Aufsuchen *sämtlicher* Stammfunktionen $F(x)$ zu einer vorgegebenen stetigen Funktion $f(x)$ wird als *Integration* bezeichnet:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integration}} F(x) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \quad (\text{V-4})$$

Wir können daher die *Integration* als *Umkehrung der Differentiation* auffassen. Während der *Differentiationsprozess* aus einer vorgegebenen Funktion die *Ableitung* erzeugt, wird durch den Prozess der *Integration* aus einer vorgegebenen Ableitungsfunktion die *Gesamtheit der Stammfunktionen* ermittelt.

2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem sog. *Flächenproblem*, d. h. der Aufgabe, die *Fläche* zwischen einer Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse im Intervall $a \leq x \leq b$ zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe wird uns dabei zu dem wichtigen Begriff des *bestimmten Integrals* einer Funktion $f(x)$ führen.

Zunächst aber soll das Problem an einem einfachen Beispiel näher erläutert werden.

2.1 Ein einführendes Beispiel

Wir stellen uns die Aufgabe, den *Flächeninhalt* A zwischen der Normalparabel $y = x^2$ und der x -Achse im Intervall $1 \leq x \leq 2$ zu berechnen (Bild V-3).

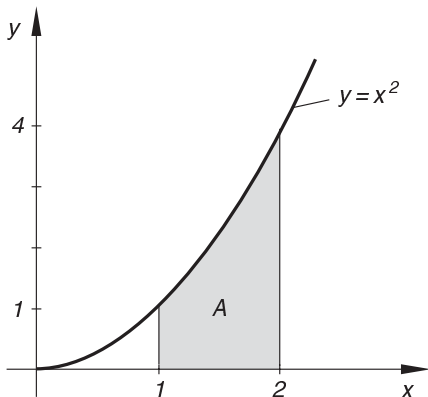


Bild V-3

Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Parabel $y = x^2$ und der x -Achse im Intervall $1 \leq x \leq 2$

Dabei verfahren wir wie folgt:

- (1) Das Flächenstück wird zunächst durch Schnitte parallel zur y -Achse in n Streifen gleicher Breite Δx zerlegt.
- (2) Anschließend wird jeder Streifen in geeigneter Weise durch ein *Rechteck* ersetzt (der Flächeninhalt eines Rechtecks lässt sich nämlich *elementar* als Produkt der beiden Seiten berechnen). Der gesuchte Flächeninhalt A ist dann *näherungsweise* gleich der Summe aller Rechtecksflächen.
- (3) Dabei gilt: *Je größer die Anzahl der Streifen, umso besser die Näherung!* Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ strebt die Summe der Rechtecksflächen gegen den gesuchten Flächeninhalt A .

Wir wollen jetzt das beschriebene Verfahren für eine Zerlegung der Fläche in 5, 10 bzw. 20 Streifen näher studieren.

Zerlegung der Fläche in $n = 5$ Streifen

Streifenbreite: $\Delta x = 0,2$

Die Teilpunkte $P_0, P_1, \dots, P_5$ auf der Parabel besitzen die folgenden Koordinaten (siehe hierzu die Bilder V-4 und V-5):

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	1^2	$1,2^2$	$1,4^2$	$1,6^2$	$1,8^2$	2^2

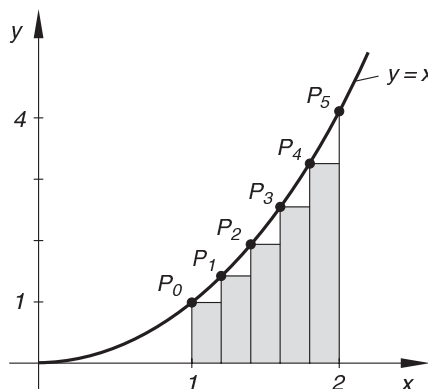


Bild V-4 Zum Begriff der Untersumme

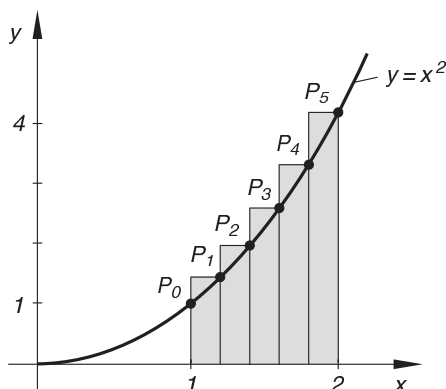


Bild V-5 Zum Begriff der Obersumme

Untersumme (Bild V-4)

Jeder Streifen wird durch ein zu *klein* ausfallendes Rechteck ersetzt (die Höhe entspricht dem Ordinatenwert im jeweiligen *linken* Randpunkt, siehe hierzu Bild V-4). Die Summe dieser Rechtecksflächen bezeichnet man daher als *Untersumme* U_5 . Es ist:

$$\begin{aligned}
 U_5 &= 1^2 \cdot 0,2 + 1,2^2 \cdot 0,2 + 1,4^2 \cdot 0,2 + 1,6^2 \cdot 0,2 + 1,8^2 \cdot 0,2 = \\
 &= (1^2 + 1,2^2 + 1,4^2 + 1,6^2 + 1,8^2) \cdot 0,2 = 2,04
 \end{aligned}
 \tag{V-5}$$

Obersumme (Bild V-5)

Jetzt ersetzen wir jeden Streifen durch ein zu *groß* ausfallendes Rechteck (als Höhe wählen wir den Ordinatenwert im jeweiligen *rechten* Randpunkt, siehe hierzu Bild V-5). Die Summe dieser Rechtecksflächen heißt daher *Obersumme* O_5 . Es ist:

$$\begin{aligned} O_5 &= 1,2^2 \cdot 0,2 + 1,4^2 \cdot 0,2 + 1,6^2 \cdot 0,2 + 1,8^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,2 = \\ &= (1,2^2 + 1,4^2 + 1,6^2 + 1,8^2 + 2^2) \cdot 0,2 = 2,64 \end{aligned} \quad (\text{V-6})$$

Flächeninhalt A

In beiden Fällen (Unter- bzw. Obersumme) haben wir den tatsächlichen Kurvenverlauf durch eine *treppenförmige* Kurve ersetzt.

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt dabei *zwischen* Unter- und Obersumme:

$$U_5 \leq A \leq O_5, \quad \text{d. h.} \quad 2,04 \leq A \leq 2,64 \quad (\text{V-7})$$

Die Abweichung zwischen den beiden Summen beträgt 0,6, d. h. diese Näherung ist noch viel zu *grob*.

Zerlegung der Fläche in $n = 10$ Streifen

Streifenbreite: $\Delta x = 0,1$

Für *Unter-* und *Obersumme* ergeben sich jetzt folgende Werte:

$$\begin{aligned} U_{10} &= 1^2 \cdot 0,1 + 1,1^2 \cdot 0,1 + 1,2^2 \cdot 0,1 + \dots + 1,9^2 \cdot 0,1 = \\ &= (1^2 + 1,1^2 + 1,2^2 + \dots + 1,9^2) \cdot 0,1 = 2,185 \end{aligned} \quad (\text{V-8})$$

$$\begin{aligned} O_{10} &= 1,1^2 \cdot 0,1 + 1,2^2 \cdot 0,1 + 1,3^2 \cdot 0,1 + \dots + 2^2 \cdot 0,1 = \\ &= (1,1^2 + 1,2^2 + 1,3^2 + \dots + 2^2) \cdot 0,1 = 2,485 \end{aligned} \quad (\text{V-9})$$

Dabei gilt für den Flächeninhalt A :

$$U_{10} \leq A \leq O_{10}, \quad \text{d. h.} \quad 2,185 \leq A \leq 2,485 \quad (\text{V-10})$$

Die Abweichung zwischen Ober- und Untersumme beträgt jetzt nur noch 0,3, hat sich also genau *halbiert*. Eine weitere Verbesserung erhält man durch abermalige Verdopplung der Streifenanzahl.

Zerlegung der Fläche in $n = 20$ Streifen

Streifenbreite: $\Delta x = 0,05$

$$U_{20} = (1^2 + 1,05^2 + 1,10^2 + \dots + 1,95^2) \cdot 0,05 = 2,25875 \quad (\text{V-11})$$

$$O_{20} = (1,05^2 + 1,10^2 + 1,15^2 + \dots + 2^2) \cdot 0,05 = 2,40875 \quad (\text{V-12})$$

$$U_{20} \leq A \leq O_{20}, \quad \text{d. h.} \quad 2,25875 \leq A \leq 2,40875 \quad (\text{V-13})$$

Die Differenz zwischen Ober- und Untersumme beträgt jetzt nur noch 0,15.

Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$

Bei einer *Vergrößerung* der Streifenanzahl n nehmen offensichtlich die Untersummen *zu* und die Obersummen *ab*, die *Differenz* zwischen Ober- und Untersumme wird dabei immer *kleiner*, wie die folgenden Rechenergebnisse für Zerlegungen in 5, 10, 20, 50, 100 und 1000 Streifen deutlich zeigen:

n	5	10	20	50	100	1000
U_n	2,04	2,185	2,258 75	2,3034	2,318 35	2,331 833 5
O_n	2,64	2,485	2,408 75	2,3634	2,348 35	2,334 833 5
$O_n - U_n$	0,6	0,3	0,15	0,06	0,03	0,003

Bei *beliebig feiner* Zerlegung, d. h. für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ streben Ober- und Untersumme gegen einen *gemeinsamen* Grenzwert, der *geometrisch* den gesuchten *Flächeninhalt* A darstellt. In unserem Beispiel ergibt sich dabei, wie wir später noch zeigen werden, der folgende Wert:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{7}{3} = 2,\bar{3} \dots \quad (\text{V-14})$$

2.2 Das bestimmte Integral

Wir *verallgemeinern* jetzt das im vorherigen Abschnitt dargelegte *Flächenproblem*. Um zu einer möglichst *anschaulichen* Deutung des Integralbegriffes zu gelangen, wollen wir zunächst von der stetigen Funktion $y = f(x)$ voraussetzen, dass sie im gesamten Intervall $a \leq x \leq b$ *oberhalb* der x -Achse verläuft und dabei *monoton wächst* (Bild V-6).

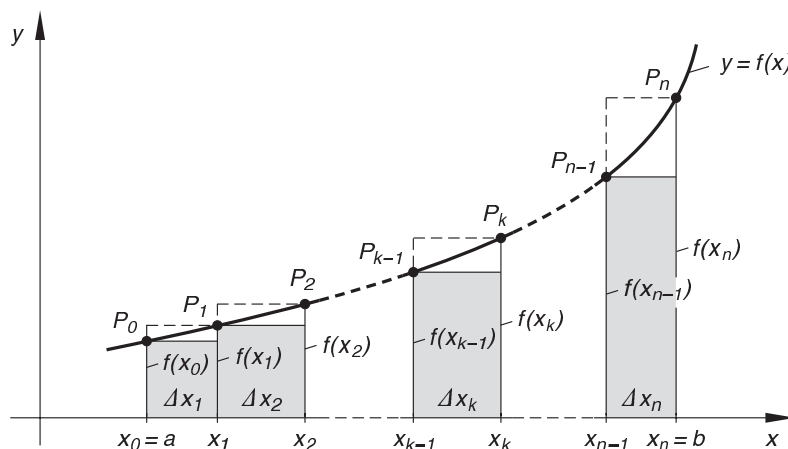


Bild V-6 Zum Flächenproblem der Integralrechnung

Unsere Aufgabe besteht nun darin, den *Flächeninhalt* A zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse im Intervall $a \leq x \leq b$ zu berechnen. Dabei verfahren wir wiederum wie folgt:

- (1) Zunächst zerlegen wir die Fläche in n achsenparallele Streifen, deren *Breite* wir der Reihe nach mit $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$ bezeichnen. Die Streifenbreiten dürfen also durchaus unterschiedlich sein.
- (2) Dann ersetzen wir jeden Streifen durch ein *Rechteck*. Wählt man als Höhe des Rechtecks den jeweils *kleinsten* Funktionswert (Ordinate des *linken* Randpunktes), so besitzen die in Bild V-6 *grau* unterlegten Rechtecke der Reihe nach den folgenden Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 \underline{A}_1 &= f(x_0) \Delta x_1 \\
 \underline{A}_2 &= f(x_1) \Delta x_2 \\
 &\vdots \\
 \underline{A}_k &= f(x_{k-1}) \Delta x_k \\
 &\vdots \\
 \underline{A}_n &= f(x_{n-1}) \Delta x_n
 \end{aligned} \tag{V-15}$$

Der gesuchte Flächeninhalt A ist dann gewiss *nicht kleiner* als die als *Untersumme* U_n bezeichnete Summe dieser Rechtecksflächen:

$$\begin{aligned}
 U_n &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \dots + \underline{A}_k + \dots + \underline{A}_n = \\
 &= f(x_0) \Delta x_1 + f(x_1) \Delta x_2 + \dots + f(x_{k-1}) \Delta x_k + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_n = \\
 &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k \leq A
 \end{aligned} \tag{V-16}$$

Wählt man jedoch als Rechteckshöhe den jeweils *größten* Funktionswert (Ordinate des *rechten* Randpunktes), so ist der Flächeninhalt dieser zu *groß* ausfallenden Rechtecke der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 \overline{A}_1 &= f(x_1) \Delta x_1 \\
 \overline{A}_2 &= f(x_2) \Delta x_2 \\
 &\vdots \\
 \overline{A}_k &= f(x_k) \Delta x_k \\
 &\vdots \\
 \overline{A}_n &= f(x_n) \Delta x_n
 \end{aligned} \tag{V-17}$$

Der Flächeninhalt A ist dann gewiss *nicht größer* als die als *Obersumme* O_n bezeichnete Summe dieser Rechtecksflächen:

$$\begin{aligned} O_n &= \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_k} + \dots + \overline{A_n} = \\ &= f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_k) \Delta x_k + \dots + f(x_n) \Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \geq A \end{aligned} \quad (\text{V-18})$$

Die gesuchte Fläche A liegt damit *zwischen* Unter- und Obersumme:

$$U_n \leq A \leq O_n \quad (\text{V-19})$$

- (3) Mit *zunehmender Verfeinerung* der Zerlegung nehmen die Untersummen *zu*, die Obersummen jedoch *ab*. Wir zeigen dies am Beispiel der *Verdoppelung* der Streifenanzahl ($n \rightarrow 2n$). Jeder Streifen der Breite h soll dabei durch *Halbierung* in zwei gleichbreite neue Streifen mit der Breite $h/2$ übergehen (Bild V-7).

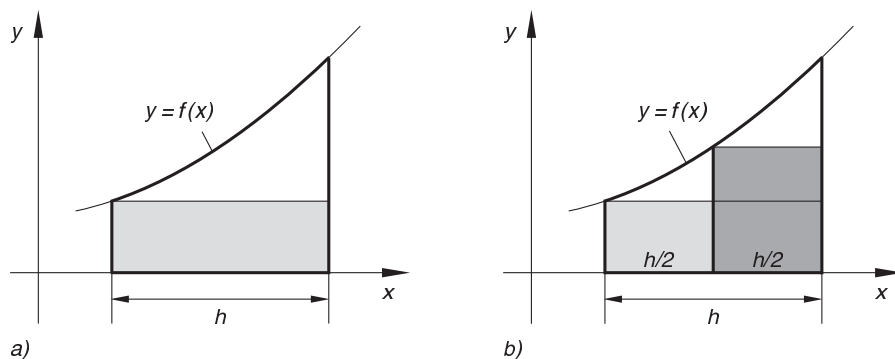


Bild V-7 Halbierung der Streifen bewirkt eine Zunahme der Untersumme

Das in Teilbild a) grau unterlegte Rechteck gehört zur *alten* Untersumme und wird durch die beiden in Teilbild b) hell- bzw. dunkelgrau unterlegten Rechtecke ersetzt, deren Gesamtfläche *größer* ist als die Fläche des ursprünglichen Rechtecks in Teilbild a). Daher nimmt die Untersumme *zu*. Analog kann man zeigen, dass die Obersumme bei einer Verdoppelung der Streifenanzahl *abnimmt* (jedes Rechteck wird durch zwei neue Rechtecke mit einer *kleineren* Gesamtfläche ersetzt). Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ streben Unter- und Obersumme gegen einen *gemeinsamen* Grenzwert, wenn *zugleich* die Breite Δx_k *sämtlicher* Streifen gegen Null geht ($k = 1, 2, \dots, n$). Diesen Grenzwert bezeichnet man dann als das *bestimmte Integral der Funktion* $f(x)$ *in den Grenzen von* $x = a$ *bis* $x = b$ und schreibt dafür symbolisch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-20})$$

In unserer *geometrischen* Betrachtungsweise bedeutet er den *Flächeninhalt* A zwischen der Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ und der x -Achse im Intervall $a \leq x \leq b$. Es gilt daher (wir können uns auf den Grenzwert der Obersumme beschränken):

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-21})$$

Wir führen noch die folgenden allgemein üblichen Bezeichnungen ein:

x : *Integrationsvariable*

$f(x)$: *Integrandfunktion* (kurz: *Integrand*)

a : *Untere Integrationsgrenze*

b : *Obere Integrationsgrenze*

Das *bestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ lässt sich somit allgemein wie folgt definieren:

Definition: Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (\text{V-22})$$

heißt, falls er vorhanden ist, das *bestimmte Integral der Funktion* $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ und wird durch das

Symbol $\int_a^b f(x) dx$ gekennzeichnet.

Anmerkungen

- (1) Das bestimmte Integral ist also der *Grenzwert* einer Folge von Summen. Dieser Grenzwert ist *vorhanden*, wenn der Integrand $f(x)$ im *endlichen* Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ *beschränkt*¹⁾ ist und dort höchstens *endlich* viele Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen, hebbare Unstetigkeiten) besitzt. Für *stetige* Funktionen sind diese Bedingungen *stets* erfüllt.
- (2) Eine Funktion $f(x)$, deren bestimmtes Integral existiert, heißt *integrierbar*. Stetige Funktionen sind demnach *stets* integrierbar.
- (3) Der Integralwert kann positiv, negativ oder null sein. Er ist dabei *unabhängig* von der vorgenommenen Streifenzerlegung, sofern nur die Breite eines jeden Streifens gegen Null strebt ($\Delta x_k \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$).

¹⁾ Es gilt in diesem Intervall also $|f(x)| < K$, wobei K eine positive Konstante ist.

- (4) Man beachte, dass das Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ endlich ist. In der Regel ist $a < b$ (Integration in *positiver* x -Richtung). Aber auch der Fall $a > b$ ist möglich (jetzt wird von rechts nach links, d. h. in *negativer* x -Richtung integriert). Eine geometrisch anschauliche Interpretation des bestimmten Integrals als *Flächeninhalt* ist nur für $f(x) \geq 0$ und $a < b$ möglich.

Anschauliche Interpretation der symbolischen Schreibweise

Wir möchten noch auf eine zwar nicht ganz präzise, dafür jedoch sehr *anschauliche* Interpretation der in der Integralrechnung verwendeten Symbolik hinweisen. Der in Bild V-8 skizzierte (*dick umrandete*) *infinitesimal* schmale Streifen der Breite dx besitzt einen Flächeninhalt, der *näherungsweise* mit dem Flächeninhalt $dA = f(x) dx$ des eingezeichneten (*grau unterlegten*) rechteckigen *Flächenelementes* übereinstimmt. Deutet man das Integralzeichen als eine Art gestrecktes *Summenzeichen*, so kann das bestimmte

Integral $\int_a^b f(x) dx$ als *Summe* aller zwischen $x = a$ und $x = b$ gelegenen *infinitesimal* schmalen Streifenflächen vom Flächeninhalt $dA = f(x) dx$ aufgefasst werden:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-23})$$

(„Summiere über alle Flächenelemente $dA = f(x) dx$, die in der Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$ liegen“). Die Fläche A wird gewissermaßen aus unendlich vielen Flächenelementen zusammengesetzt, wobei das „erste“ Element bei $x = a$ und das „letzte“ Element bei $x = b$ liegt. Bild V-9 verdeutlicht diese geometrische Interpretation.

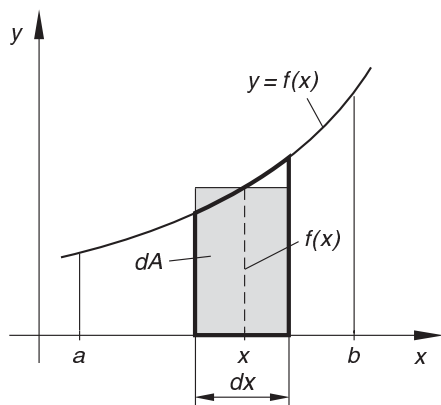


Bild V-8

Zur anschaulichen geometrischen Interpretation des bestimmten Integrals

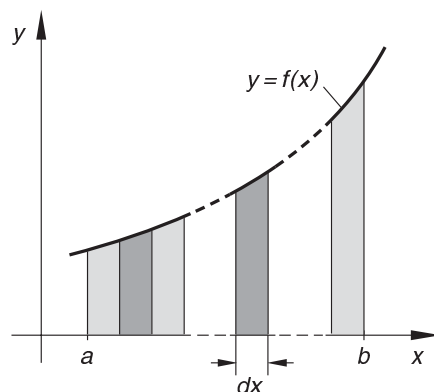


Bild V-9

Das bestimmte Integral als *unendliche* Summe von Flächenelementen

■ Beispiel

Wir kehren jetzt zu dem Beispiel des vorangegangenen Abschnitts zurück und wollen den Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = f(x) = x^2$ und der x -Achse im Intervall $1 \leq x \leq 2$ als *Grenzwert der Obersumme* O_n berechnen. Da der Integralwert *unabhängig* von der Art der Zerlegung ist, wählen wir hier zweckmäßigerweise eine Unterteilung in Streifen *gleicher Breite* Δx (sog. *äquidistante* Zerlegung, Bild V-10).

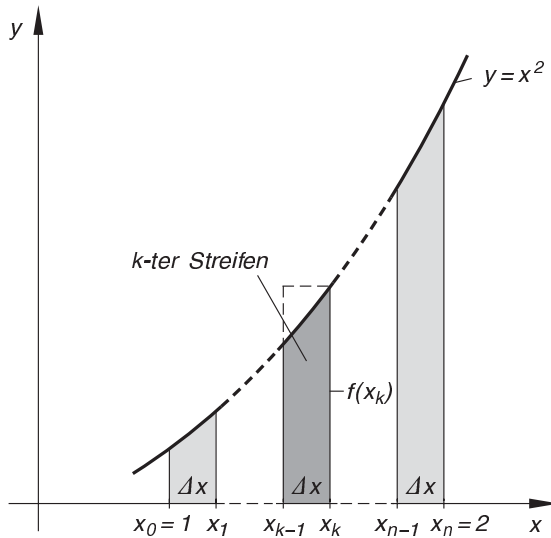


Bild V-10 Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_1^2 x^2 dx$ als Grenzwert der Obersumme

Bei n Streifen beträgt die *Streifenbreite* $\Delta x = (2 - 1)/n = 1/n$. Die Abszissenwerte der insgesamt $n + 1$ Teilpunkte auf der x -Achse lauten dann der Reihe nach wie folgt:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
1	$1 + \Delta x$	$1 + 2 \cdot \Delta x$	$\dots$	$1 + k \cdot \Delta x$	$\dots$	2

Für den in Bild V-10 *dunkelgrau* unterlegten k -ten Streifen gilt dann *näherungsweise*:

$$\text{Streifenhöhe: } f(x_k) = x_k^2 = (1 + k \cdot \Delta x)^2 = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2$$

$$\text{Streifenbreite: } \Delta x = \frac{1}{n}$$

$$\text{Streifenfläche: } f(x_k) \Delta x = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Damit erhält man für die Obersumme nach Gleichung (V-18):

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{2k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 \end{aligned}$$

Die dabei auftretenden endlichen Summen werden unter Verwendung der folgenden Formelausdrücke berechnet, die wir der *Formelsammlung* entnommen haben (Abschnitt I.3.4):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mit diesen Ausdrücken lässt sich die Obersumme auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} O_n &= 1 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= 1 + \frac{n+1}{n} + \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ strebt die Streifenbreite $\Delta x = 1/n$ gegen Null und die

Obersumme O_n geht dabei definitionsgemäß in das bestimmte Integral $\int_1^2 x^2 dx$ über, das den gesuchten Flächeninhalt A darstellt:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} = \\ &= 2 + 0 + \frac{1}{6} (1 + 0) (2 + 0) = 2 + 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Fazit: Die direkte Berechnung eines bestimmten Integrals über den Grenzwert (V-22) ist – wie dieses einfache Beispiel bereits zeigt – eine meist schwierige und aufwändige Angelegenheit. ■

3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion

Unter den in Abschnitt 2.2 genannten Voraussetzungen repräsentiert das *bestimmte Integral* $\int_a^b f(t) dt$ den Flächeninhalt A zwischen der Kurve $y = f(t)$ und der t -Achse im Intervall $a \leq t \leq b$ (Bild V-11)²⁾.

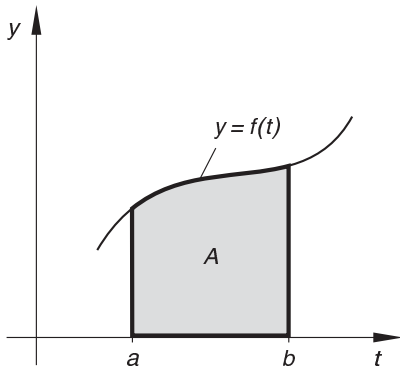


Bild V-11 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

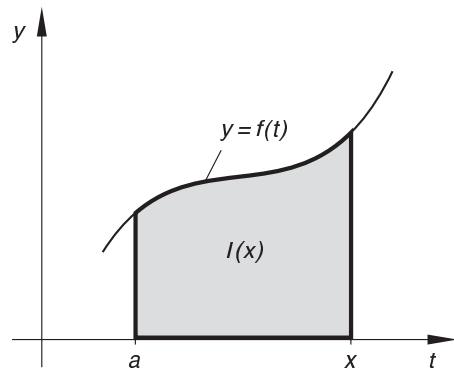


Bild V-12 Zum Begriff des unbestimmten Integrals (Flächenfunktion)

Betrachtet man in diesem Integral die *untere* Integrationsgrenze a als *fest*, die *obere* Integrationsgrenze b dagegen als *variabel*, so hängt der Integralwert nur noch von der *oberen* Grenze ab: *Der Integralwert ist daher eine Funktion der oberen Grenze.* Um auch nach außen hin zu dokumentieren, dass die obere Grenze *variabel* ist, ersetzen wir b durch x und erhalten die Funktion

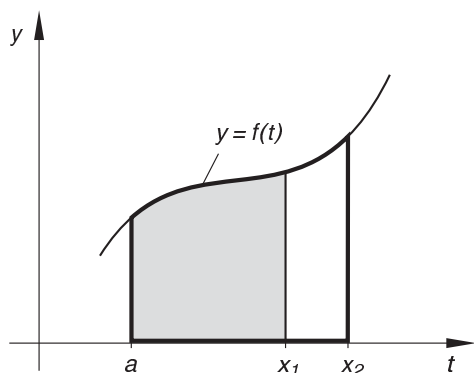
$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (\text{V-24})$$

(siehe Bild V-12). Sie wird als ein *unbestimmtes Integral* von $f(t)$ bezeichnet, da die obere Grenze *unbestimmt* ist (im Sinne von *variabel*).

²⁾ Die *Bezeichnung* der Integrationsvariablen ist dabei *ohne* jede Bedeutung. Um im Folgenden Missverständnisse zu vermeiden, kennzeichnen wir in diesem Abschnitt die Integrationsvariable durch das Buchstaben-symbol t (anstatt von x).

Geometrische Deutung des unbestimmten Integrals

Das *unbestimmte Integral* $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ beschreibt für $x \geq a$ den *Flächeninhalt* zwischen der Kurve $y = f(t)$ und der t -Achse im Intervall $a \leq t \leq x$ in Abhängigkeit von der oberen Grenze x und wird daher auch als *Flächenfunktion* bezeichnet (Bild V-12). Für *verschiedene* x -Werte erhält man im Allgemeinen *verschiedene* Flächeninhalte. Aus dem *unbestimmten* Integral wird dabei jeweils ein *bestimmtes* Integral (die obere Integrationsgrenze besitzt dann einen *festen* Wert). In Bild V-13 sind die Funktionswerte der Flächenfunktion $I(x)$ für zwei *verschiedene* obere Grenzen x_1 und x_2 geometrisch als Flächeninhalte dargestellt.



Grau unterlegte Fläche:

$$I(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt$$

Stark umrandete Fläche:

$$I(x_2) = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

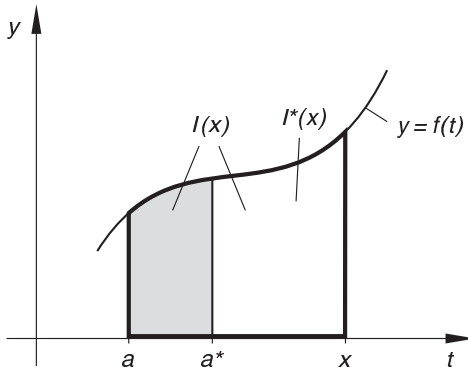
Bild V-13 Das unbestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze

Wählt man als *untere* Grenze a^* (anstatt von a), so ist auch

$$I^*(x) = \int_{a^*}^x f(t) dt \quad (\text{V-25})$$

ein *unbestimmtes Integral* (eine *Flächenfunktion*) von $f(t)$. Zwischen $I(x)$ und $I^*(x)$ besteht dabei der folgende Zusammenhang, den man unmittelbar aus Bild V-14 entnehmen kann:

$$I(x) - I^*(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_{a^*}^x f(t) dt = \int_a^{a^*} f(t) dt \quad (\text{V-26})$$

**Bild V-14**

Flächenfunktionen
(unbestimmte Integrale)
unterscheiden sich in der
unteren Grenze voneinander

Die beiden Flächenfunktionen unterscheiden sich demnach durch das *bestimmte* Integral

$$\int_a^{a^*} f(t) dt, \text{ d. h. durch eine } \textit{Konstante}. \text{ Ihr Wert ist nichts anderes als der } \textit{Flächeninhalt}$$

zwischen der Kurve $y = f(t)$ und der t -Achse im Intervall $a \leq t \leq a^*$ (grau unterlegte Fläche in Bild V-14; Voraussetzung: $a^* > a$). Da aber für die Wahl der *unteren* Integrationsgrenze a , von der an die Flächenberechnung erfolgt, grundsätzlich *beliebig* viele Möglichkeiten existieren, gibt es entsprechend auch *unendlich* viele unbestimmte Integrale der Funktion $y = f(t)$. Sie unterscheiden sich in der *unteren* Grenze voneinander.

Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Eigenschaften der unbestimmten Integrale

1. Das *unbestimmte* Integral $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ repräsentiert den *Flächeninhalt* zwischen der Funktion $y = f(t)$ und der t -Achse im Intervall $a \leq t \leq x$ in Abhängigkeit von der *oberen* Grenze x .
2. Zu jeder *stetigen* Funktion $f(t)$ gibt es *unendlich viele* unbestimmte Integrale, die sich in ihrer *unteren* Grenze voneinander unterscheiden.
3. Die Differenz zweier unbestimmter Integrale $I_1(x)$ und $I_2(x)$ von $f(t)$ ist eine *Konstante*.

Anmerkungen

- (1) Die *geometrische* Deutung eines unbestimmten Integrals als *Flächenfunktion* ist nur möglich, wenn $f(x) \geq 0$ und $x \geq a$ ist. Denn nur dann liegt die Kurve und damit das Flächenstück *oberhalb* der x -Achse, wobei die Integration von links nach rechts, d. h. in *positiver* x -Richtung erfolgt. Diese Einschränkungen werden später fallen gelassen.
- (2) Man beachte den *fundamentalen Unterschied* zwischen einem bestimmten und einem unbestimmten Integral:

Bestimmtes Integral: Reeller Zahlenwert

Unbestimmtes Integral: Funktion der oberen Grenze

■ Beispiel

$I_1(x) = \int_0^x t^2 dt$ und $I_2(x) = \int_1^x t^2 dt$ sind zwei *unbestimmte Integrale* der Normal-

parabel $f(t) = t^2$ und repräsentieren die in Bild V-15 dargestellten Flächen (die Flächenberechnung beginnt bei $t = 0$ bzw. $t = 1$ und endet an der Stelle $x \geq 1$). Sie

unterscheiden sich dabei durch das *bestimmte Integral* $\int_0^1 t^2 dt$, d. h. durch eine Konstante, deren Wert der im Bild *grau* unterlegten Fläche entspricht:

$$I_1(x) - I_2(x) = \int_0^x t^2 dt - \int_1^x t^2 dt = \int_0^1 t^2 dt = \text{const.}$$

Die Konstante besitzt – wie wir später in Abschnitt 6 (1. Beispiel) noch zeigen werden – den Wert $1/3$ (Fläche unter der Normalparabel $y = t^2$ zwischen $t = 0$ und $t = 1$).

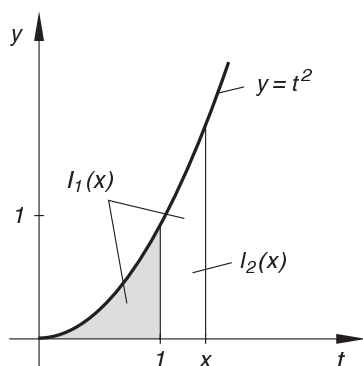


Bild V-15

■

4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Wird die *obere* Grenze x im unbestimmten Integral $I(x) = \int_a^x f(x) dx$ um Δx vergrößert, so wächst der Flächeninhalt nach Bild V-16 um

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) \quad (\text{V-27})$$

(*grau unterlegte Fläche in Bild V-16*)³⁾.

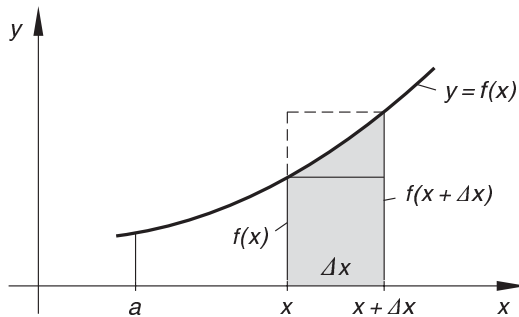


Bild V-16

Zur Herleitung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung

Dieser *Flächenzuwachs* liegt zwischen den Flächeninhalten der beiden eingezeichneten Rechtecke gleicher Breite Δx . Das *kleinere* Rechteck besitzt die Höhe $f(x)$ und damit den Flächeninhalt $f(x) \Delta x$, das *größere* Rechteck die Höhe $f(x + \Delta x)$ und damit den Flächeninhalt $f(x + \Delta x) \Delta x$. Zwischen den drei Flächeninhalten besteht daher die Beziehung

$$f(x) \Delta x \leq \Delta I \leq f(x + \Delta x) \Delta x \quad (\text{V-28})$$

Nach Division durch Δx wird daraus:

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x) \quad (\text{V-29})$$

Beim *Grenzübergang* $\Delta x \rightarrow 0$ bleibt diese Ungleichung *erhalten*:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \quad (\text{V-30})$$

³⁾ Wir lassen die unterschiedliche Kennzeichnung zwischen der *Integrationsvariablen* und der *oberen* Grenze *fallen*. Ferner nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Funktion $f(x)$ im gesamten Integrationsbereich *oberhalb* der x -Achse verläuft und dabei *monoton* wächst.

Der in der *Mitte* eingeschlossene Grenzwert ist dabei *definitionsgemäß* die 1. Ableitung $I'(x)$ der Flächenfunktion $I(x)$, während die beiden äußeren Grenzwerte wegen der vorausgesetzten *Stetigkeit* von $f(x)$ jeweils den Funktionswert $f(x)$ ergeben:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = I'(x) \quad (\text{V-31})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x) \quad (\text{V-32})$$

Damit erhält man die *Ungleichung*

$$f(x) \leq I'(x) \leq f(x) \quad (\text{V-33})$$

die aber nur dann bestehen kann, wenn

$$I'(x) = f(x) \quad (\text{V-34})$$

ist. Damit haben wir nachgewiesen, dass die erste Ableitung eines unbestimmten Integrals $I(x) = \int_a^x f(x) dx$ zum Integranden $f(x)$ führt. *Dies aber bedeutet, dass $I(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.*

Wir fassen diese bedeutende Aussage in dem sog. *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung* wie folgt zusammen:

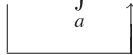
Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Jedes unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(x) dx$ der stetigen Funktion $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$:

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx \Rightarrow I'(x) = f(x) \quad (\text{V-35})$$

Die Aussage des Fundamentalsatzes lässt sich auch wie folgt verdeutlichen:

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (\text{V-36})$$



Differentiation

Wir ziehen noch einige **Folgerungen** aus dem Fundamentalsatz:

- (1) $I(x)$ ist wegen $I'(x) = f(x)$ eine *stetig differenzierbare* Funktion.
- (2) Jedes unbestimmte Integral $I(x)$ der Funktion $f(x)$ lässt sich in der Form

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + C_1 \quad (\text{V-37})$$

darstellen, wobei $F(x)$ *irgendeine* (spezielle) Stammfunktion von $f(x)$ und C_1 eine *geeignete* (reelle) Konstante bedeutet, deren Wert noch von der *unteren* Grenze a abhängen wird.

- (3) Da es zu einer *stetigen* Funktion $f(x)$ *unendlich* viele unbestimmte Integrale gibt, kennzeichnet man diese *Funktionenschar* durch Weglassen der Integrationsgrenzen in folgender Weise:

$$\int f(x) dx: \text{ Menge aller unbestimmten Integrale von } f(x)$$

Sie ist stets in der Form

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (F'(x) = f(x)) \quad (\text{V-38})$$

darstellbar, wobei $F(x)$ *irgendeine* (spezielle) Stammfunktion zu $f(x)$ bedeutet und der Parameter C *alle* reellen Werte durchläuft. Die Konstante C heißt in diesem Zusammenhang auch *Integrationskonstante*.

- (4) Für *stetige* Funktionen besteht *kein Unterschied* zwischen den Begriffen „Stammfunktion“ und „unbestimmtes Integral“.

■ Beispiele

$$(1) \quad \int (2x + 1) dx = ?$$

Wir wissen: Es genügt, *irgendeine* Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = 2x + 1$ zu finden. Die Funktion $F(x) = x^2 + x$ besitzt die geforderte Eigenschaft:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + x) = 2x + 1 = f(x)$$

Daher gilt:

$$\int (2x + 1) dx = F(x) + C = x^2 + x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \int e^x dx = ?$$

Eine Stammfunktion zum Integranden $f(x) = e^x$ ist $F(x) = e^x$, da

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (e^x) = e^x = f(x)$$

ergibt. Daher ist:

$$\int e^x dx = F(x) + C = e^x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

die Gesamtheit der unbestimmten Integrale von $f(x) = e^x$.

$$(3) \quad \int \frac{4}{1+x^2} dx = ?$$

$F(x) = 4 \cdot \arctan x$ ist eine Stammfunktion des Integranden $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (4 \cdot \arctan x) = 4 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{1+x^2} = f(x)$$

Daraus folgt:

$$\int \frac{4}{1+x^2} dx = F(x) + C = 4 \cdot \arctan x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(4) Aus einer *Integraltafel* entnehmen wir die folgende Integralformel:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Wir *überprüfen* diese Formel, indem wir die *Ableitung* der auf der rechten Seite stehenden Funktion bilden. Sie führt (wie erwartet) zum Integranden $\ln x$:

$$\frac{d}{dx} (x \cdot \ln x - x + C) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass die Funktion $F(x) = x \cdot \ln x - x + C$ in der Tat eine *Stammfunktion* von $f(x) = \ln x$ ist. Die Integralformel ist somit *richtig*. Man bezeichnet diese Art der Beweisführung auch als „*Verifizierung*“.

(5) **Fallgesetze im luftleeren Raum**

Aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v(t) = gt + v_0 \quad (\text{für } t \geq 0)$$

erhält man wegen $v(t) = \dot{s}(t)$ durch *Integration* das folgende Zeitgesetz für den Fallweg s des frei fallenden Körpers:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \dot{s}(t) dt = \int v(t) dt = \int (gt + v_0) dt = \\ &= \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0 \end{aligned}$$

(g : Erdbeschleunigung; v_0 : Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$; $C = s_0$: Wegmarke zur Zeit $t = 0$). Denn es gilt:

$$\dot{s}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0 \right) = gt + v_0 = v(t) \quad \blacksquare$$

5 Grund- oder Stammintegrale

In Kap. IV, Abschnitt 1.3 wurden die *Ableitungen der elementaren Funktionen* in tabellarischer Form zusammengestellt. Die dortige Tabelle 1 enthält in der *linken* Spalte die jeweilige *Funktion* $f(x)$ und in der *rechten* Spalte die zugehörige *Ableitung* $f'(x)$. Nach dem *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung* besteht dann zwischen der (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$ der Zusammenhang

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\text{V-39})$$

So gelten beispielsweise die folgenden Beziehungen (mit $C \in \mathbb{R}$):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{für } n \neq -1), \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

Mit anderen Worten: Die in der *linken* Spalte der Ableitungstabelle aus Kap. IV aufgeführte Funktion ist eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* der in der *rechten* Spalte stehenden Funktion. Die auf diese Weise erhaltenen (unbestimmten) Integrale heißen *Grund- oder Stammintegrale*. Wir haben sie in der nachfolgenden Tabelle zusammengetragen.

Tabelle 1: Grund- oder Stammintegrale ($C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 \, dx = x + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ (Potenzregel)	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln x + \sqrt{x^2+1} + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C \quad (x > 1)$	
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C_1 & x < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C_2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{für}$	

6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion

Zur Berechnung eines *bestimmten* Integrals $\int_a^b f(x) dx$ genügt – wie wir gleich zeigen werden – die Kenntnis *einer* beliebigen Stammfunktion des Integranden $f(x)$. Zunächst aber betrachten wir das *unbestimmte* Integral $I(x) = \int_a^x f(x) dx$. Es ist bekanntlich in der Form

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + C \quad (\text{V-40})$$

darstellbar, wobei $F(x)$ irgendeine spezielle (als bekannt vorausgesetzte) Stammfunktion von $f(x)$ bedeutet und C eine geeignete reelle Konstante. Diese wird aus der Gleichung

$$I(a) = \int_a^a f(x) dx = F(a) + C = 0$$

zu $C = -F(a)$ bestimmt⁴⁾. Somit ist

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a) \quad (\text{V-41})$$

Für $x = b$ erhält man hieraus den Wert des gesuchten *bestimmten* Integrals als *Differenz* der Funktionswerte von $F(x)$ an der oberen und unteren Integrationsgrenze:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{V-42})$$

Der Integralwert ist dabei *völlig unabhängig* von der getroffenen Wahl der Stammfunktion. Wählt man statt $F(x)$ die Stammfunktion $F_1(x)$, so unterscheiden sich diese Funktionen bekanntlich nur durch eine additive Konstante K , d. h. es gilt $F(x) = F_1(x) + K$. Die Berechnung des bestimmten Integral nach Formel (V-42) ergibt dann:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = [F_1(b) + K] - [F_1(a) + K] = \\ &= F_1(b) + K - F_1(a) - K = F_1(b) - F_1(a) \end{aligned} \quad (\text{V-43})$$

⁴⁾ Fallen die Integrationsgrenzen *zusammen* ($a = b$), so ist der Integralwert (Flächeninhalt!) gleich Null.

Die Konstante K fällt somit bei der Differenzbildung heraus. Der Wert des bestimmten Integrals kann daher auch mit der Stammfunktion $F_1(x)$, d. h. mit einer *beliebigen* Stammfunktion berechnet werden.

Ein *bestimmtes* Integral lässt sich daher wie folgt schrittweise berechnen:

Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$

Die Berechnung eines bestimmten Integrals erfolgt in zwei Schritten:

1. Zunächst wird *irgendeine* Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f(x)$ bestimmt ($F'(x) = f(x)$).
2. Mit dieser Stammfunktion berechnet man die Werte $F(a)$ und $F(b)$ an den beiden Integrationsgrenzen und daraus die *Differenz* $F(b) - F(a)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{V-44})$$

Dabei ist das Symbol $\left[F(x) \right]_a^b$ eine *verkürzte* Schreibweise für die Differenz $F(b) - F(a)$.

Anmerkung

In der Praxis liegt das Hauptproblem in der Bestimmung einer *Stammfunktion* des Integranden. Gelingt dieses Vorhaben, so hat man das Integral in „geschlossener Form“ dargestellt. In den meisten Fällen ist dies jedoch nicht so ohne Weiteres möglich. Man ist dann auf spezielle Verfahren wie z. B. Integralsubstitutionen oder numerische Integrationsmethoden angewiesen. In Abschnitt 8 kommen wir auf dieses Problem ausführlich zurück.

■ Beispiele

- (1) Wir berechnen das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ unter Verwendung der *Potenzregel* (für $n = 2$):

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx = ?$$

Eine *Stammfunktion* $F(x)$ lässt sich leicht unter Verwendung der *Potenzregel* der Integralrechnung bestimmen (wir dürfen dabei $C = 0$ setzen):

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x$$

Für den Integralwert erhält man dann nach Gleichung (V-44):

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x \right]_1^2 = \\ &= \left(4 - \frac{16}{3} + 10 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 5 \right) = \\ &= \left(14 - \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{3 - 8 + 60}{12} \right) = \\ &= \frac{42 - 16}{3} - \frac{55}{12} = \frac{26}{3} - \frac{55}{12} = \frac{104 - 55}{12} = \frac{49}{12} \end{aligned}$$

- (3) Der *Flächeninhalt* unter der Sinuskurve $y = \sin x$ im Bereich der *ersten Halperiode* lässt sich mit Hilfe des bestimmten Integrals $A = \int_0^\pi \sin x dx$ berechnen (grau unterlegte Fläche in Bild V-17).

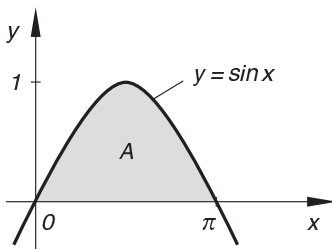


Bild V-17

Zur Berechnung der Fläche unter der Sinuskurve im Intervall $0 \leq x \leq \pi$

Eine *Stammfunktion* des Integranden $f(x) = \sin x$ ist $F(x) = -\cos x$, da $F'(x) = \sin x = f(x)$ ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = -\left[\cos x \right]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = \\ &= -(-1 - 1) = -(-2) = 2 \end{aligned}$$

- (4) Die Stirnflächen eines Rohres der Länge l besitzen die (konstanten) Temperaturen T_1 bzw. $T_2 > T_1$ (Bild V-18). Wie sieht die *Temperaturverteilung* $T(x)$ längs des Rohres aus, wenn bekannt ist, dass die 2. Ableitung $T''(x)$ dieser Funktion *verschwindet*?

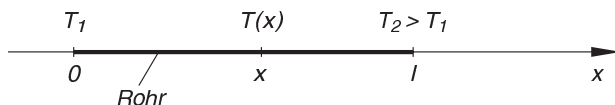


Bild V-18 Zur Bestimmung der Temperaturverteilung längs eines Rohres

Lösung: Die *Temperaturverteilungsfunktion* $T(x)$ erhält man aus $T''(x) = 0$ durch *zweimalige* (unbestimmte) Integration:

$$T'(x) = \int T''(x) dx = \int 0 dx = C_1$$

$$T(x) = \int T'(x) dx = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden aus den vorgegebenen Temperaturwerten an den beiden Stirnflächen des Rohres wie folgt berechnet:

$$T(0) = T_1 \Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 = T_1 \Rightarrow C_2 = T_1$$

$$T(x) = C_1 x + T_1$$

$$T(l) = T_2 \Rightarrow C_1 \cdot l + T_1 = T_2 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{l}$$

Die Temperaturverteilung $T(x)$ längs des Rohres verläuft somit *linear* ansteigend nach der Funktionsgleichung

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 \quad (0 \leq x \leq l)$$

und besitzt den in Bild V-19 skizzierten Verlauf.

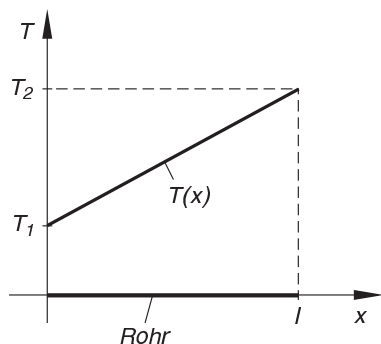


Bild V-19
Temperaturverteilung
längs eines Rohres

7 Elementare Integrationsregeln

Für den Umgang mit *bestimmten* Integralen gelten gewisse Rechenregeln, die wir im Folgenden ohne Beweis mitteilen. Sie ergeben sich unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert der Ober- bzw. Untersumme.

REGEL 1: Faktorregel

Ein *konstanter Faktor* darf *vor* das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f(x) \, dx = C \cdot \int_a^b f(x) \, dx \quad (C: \text{Konstante}) \quad (\text{V-45})$$

■ Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 4 \cdot \sin x \, dx &= 4 \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 4 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -4 \left[\cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= -4 (\cos \pi - \cos 0) = -4 (-1 - 1) = 8 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

REGEL 2: Summenregel

Eine *endliche* Summe von Funktionen darf *gliedweise* integriert werden:

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x)) \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx + \dots + \int_a^b f_n(x) \, dx \quad (\text{V-46})$$

Anmerkungen

- (1) Faktor- und Summenregel gelten sinngemäß auch für *unbestimmte* Integrale.
- (2) **Folgerung** aus den beiden Regeln: Eine *Linearkombination* von Funktionen darf *gliedweise* integriert werden, wobei die konstanten Faktoren *erhalten bleiben* (d. h. vor die Teilintegrale gezogen werden). *Ganzrationale Funktionen* (*Polynome*) werden auf diese Weise integriert. Aus einem Polynom vom Grade n wird dabei ein solches vom Grade $n + 1$.

■ **Beispiel**

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (3 \cdot e^x - 2x) dx &= \int_0^1 3 \cdot e^x dx + \int_0^1 (-2x) dx = 3 \cdot \int_0^1 e^x dx - 2 \cdot \int_0^1 x dx = \\
 &= 3 \left[e^x \right]_0^1 - 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 3 \left[e^x \right]_0^1 - \left[x^2 \right]_0^1 = \\
 &= 3(e - 1) - (1 - 0) = 3e - 3 - 1 = 3e - 4 = 4,1548
 \end{aligned}$$

■

REGEL 3: Vertauschungsregel

Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirkt einen *Vorzeichenwechsel* des Integrals:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-47})$$

■ **Beispiel**

$$\int_{\pi/2}^0 \cos x dx = - \int_0^{\pi/2} \cos x dx = - \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = - \underbrace{\left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]}_1 - \underbrace{\left[\sin 0 \right]}_0 = -1$$

■

REGEL 4: Fallen die Integrationsgrenzen *zusammen* ($a = b$), so ist der Integralwert gleich *Null*:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{V-48})$$

Anmerkung

Geometrisch einleuchtende Deutung: Zwischen den seitlichen Begrenzungen liegt keine Fläche mehr, der Flächeninhalt verschwindet somit.

■ **Beispiel**

$$\int_1^1 \frac{2}{x} dx = 2 \cdot \int_1^1 \frac{1}{x} dx = 2 \left[\ln |x| \right]_1^1 = 2(\ln 1 - \ln 1) = 0$$

■

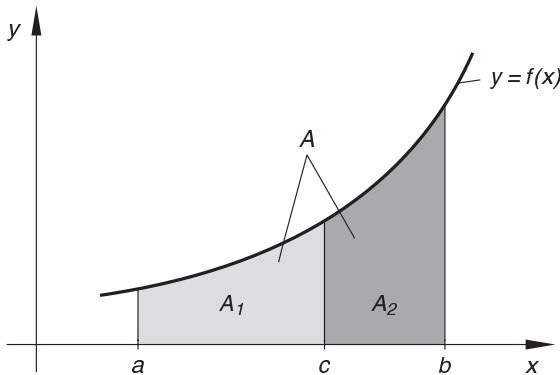
REGEL 5: Zerlegung des Integrationsintervalls in zwei Teilintervalle (Bild V-20)

Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{V-49})$$

Diese Regel besagt anschaulich, dass die Fläche A unter der Kurve $y = f(x)$ auch als *Summe zweier Teilflächen* A_1 und A_2 darstellbar ist (Bild V-20):

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{V-50})$$

**Bild V-20**

Zur Zerlegung des Integrationsintervalles in zwei Teilintervalle

■ Beispiel

Die in Bild V-21 skizzierte Fläche muss als *Summe* zweier Teilflächen berechnet werden, da sich die *obere* Flächenberandung *nicht* durch eine einzige Funktionsgleichung beschreiben lässt, sondern nur *abschnittsweise* durch (unterschiedliche) Gleichungen beschrieben werden kann:

$$y = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{für}$$

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left[(-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \right] = \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

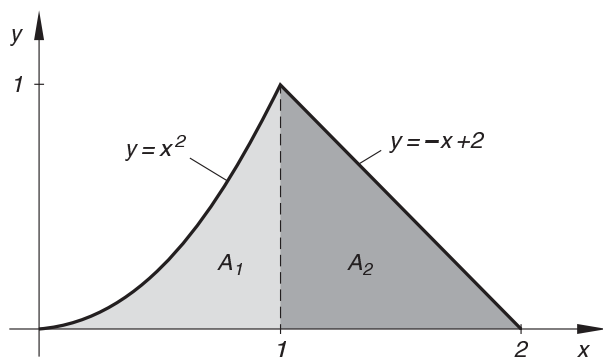


Bild V-21

8 Integrationsmethoden

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Methoden zur Berechnung von *unbestimmten* und *bestimmten Integralen* dargestellt. Zu diesen Integrationstechniken gehören:

- Die Integration durch *Substitution*
- Die Methode der *Partiellen Integration*
- Die Integration *echt gebrochenrationaler* Funktionen durch *Partialbruchzerlegung*
- Die *numerische Integration*

Den ersten drei aufgeführten Integrationstechniken liegt dabei das gemeinsame Ziel zugrunde, komplizierter gebaute Integrale auf *einfachere* Integrale, im Idealfall auf die in Abschnitt 5 behandelten *Grund-* oder *Stammintegrale* zurückzuführen.

8.1 Integration durch Substitution

Viele der in den Anwendungen auftretenden Integrale lassen sich mit Hilfe einer geeigneten *Variablen-Substitution* in *einfacher* gebaute und häufig sogar in *Grund-* oder *Stammintegrale* überführen. Wir wollen zunächst die wesentlichen Züge dieser Integrationsmethode an einem einfachen Beispiel näher erläutern.

8.1.1 Ein einführendes Beispiel

Das unbestimmte Integral $\int x \cdot \cos(x^2) dx$ gehört *nicht* zu den Grundintegralen, lässt sich jedoch durch die *Substitution* $u = x^2$ in ein solches Integral überführen (u ist eine *Hilfsvariable*). Dabei ist zu beachten, dass auch das „alte“ Differential dx durch die „neue“ Variable u und deren Differential du auszudrücken ist. Dies geschieht (nicht nur in diesem Beispiel) durch *Differentiation der Substitutionsgleichung*, wobei wir die Ableitung als *Differentialquotient* schreiben und diesen dann nach dem Differential dx auflösen:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x} \quad (\text{V-51})$$

Die *vollständige Substitution* besteht dann aus den beiden Gleichungen

$$u = x^2 \quad \text{und} \quad dx = \frac{du}{2x} \quad (\text{V-52})$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen geht das Integral $\int x \cdot \cos(x^2) dx$ in ein *elementar lösbares Integral* (*Grundintegral*) über:

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx = \int \frac{1}{2} \cdot \cos u \cdot \frac{du}{x} = \frac{1}{2} \cdot \int \cos u du = \frac{1}{2} \cdot \sin u + C \quad (\text{V-53})$$

Nach *Rücksubstitution* erhält man schließlich:

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\text{V-54})$$

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen

Der anhand des einführenden Beispiels dargelegte *Lösungsmechanismus* besteht demnach aus vier *hintereinander* auszuführenden Schritten:

Berechnung eines (unbestimmten) Integrals mittels einer geeigneten Substitution

1. *Aufstellung der Substitutionsgleichungen:*

$$u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)} \quad (\text{V-55})$$

2. *Durchführung der Integralsubstitution* durch Einsetzen der Substitutionsgleichungen in das vorgegebene (unbestimmte) Integral $\int f(x) dx$:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du \quad (\text{V-56})$$

Das *neue Integral* enthält nur noch die „Hilfsvariable“ u und deren Differential du . Der Integrand ist eine nur noch von u abhängige Funktion $\varphi(u)$.

3. *Integration (Berechnung des neuen Integrals):*

$$\int \varphi(u) du = \Phi(u) \quad (\Phi'(u) = \varphi(u)) \quad (\text{V-57})$$

4. *Rücksubstitution (mittels der Substitutionsgleichung $u = g(x)$):*

$$\int f(x) dx = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x) \quad (F'(x) = f(x)) \quad (\text{V-58})$$

Anmerkungen

- (1) Vorausgesetzt werden muss, dass die Substitutionsfunktion im Integrationsintervall *stetig differenzierbar* und *umkehrbar* ist.
- (2) Eine Integralsubstitution wird als „geeignet“ oder „sinnvoll“ angesehen, wenn sie zu einer *Vereinfachung* des Integrals führt. Im Idealfall erhält man ein Grund- oder Stammintegral.
- (3) Die Substitution muss *vollständig* sein, d. h. nach Einsetzen der Substitutionsgleichungen darf die „alte“ Variable x im Integral nicht mehr vorkommen.
- (4) In bestimmten Fällen (z. B. bei Integralen mit Wurzelausdrücken wie $\sqrt{x^2 - a^2}$) ist es günstiger, die Hilfsvariable u durch eine Substitution vom Typ $x = h(u)$ einzuführen. In dieser Gleichung ist die „neue“ Variable u die unabhängige und die „alte“ Variable x die abhängige Größe. Die *Substitutionsgleichungen* lauten dann wie folgt:

$$x = h(u), \quad \frac{dx}{du} = h'(u), \quad dx = h'(u) du \quad (\text{V-59})$$

- (5) Bei einem *bestimmten Integral* kann auf die *Rücksubstitution verzichtet* werden, wenn man die *Integrationsgrenzen* unter Verwendung der Substitutionsgleichung $u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ *mitsubstituiert* (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel).

■ Beispiel

Wir lösen das bestimmte Integral $I = \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$ wie folgt durch *Substitution*,

wobei wir die Integrationsgrenzen mitsubstituieren:

$$u = 1 + x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = 1 + 0^2 = 1$$

$$\text{Obere Grenze: } x = 1 \Rightarrow u = 1 + 1^2 = 2$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx = \int_{u=1}^{u=2} \cancel{x} \sqrt{u} \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 u^{1/2} du = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1) = 0,6095 \end{aligned}$$

■

In der folgenden Tabelle 2 geben wir eine *Übersicht* über einige besonders *häufig* auftretende Integraltypen, die unter Verwendung einer *geeigneten* Substitution gelöst werden können. Zu jedem Integraltyp wird eine Reihe von Beispielen angeführt.

Tabelle 2: Integralsubstitutionen

Integraltyp	Substitution	Beispiele	Substitution
(A) $\int f(ax + b) dx$ <i>Merkmal:</i> Die Variable x tritt in der linearen Form $ax + b$ auf ($a \neq 0$)	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	1. $\int (2x - 3)^6 dx$	$u = 2x - 3$
		2. $\int \sqrt{4x + 5} dx$	$u = 4x + 5$
		3. $\int e^{4x+2} dx$	$u = 4x + 2$
(B) $\int f(x) \cdot f'(x) dx$ <i>Merkmal:</i> Der Integrand ist das Produkt aus einer Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	1. $\int \sin x \cdot \cos x dx$	$u = \sin x$
		2. $\int \frac{\ln x}{x} dx$	$u = \ln x$
(C) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ <i>Merkmal:</i> Im Zähler steht die Ableitung des Nenners	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	1. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} dx$	$u = x^2 - 3x + 1$
		2. $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$	$u = e^x + 5$
(D) $\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ <i>Merkmal:</i> Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u du$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos u$	1. $\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$	$x = r \cdot \sin u$
		2. $\int x \sqrt{r^2 - x^2} dx$	$x = r \cdot \sin u$
		3. $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$	$x = 2 \cdot \sin u$
(E) $\int f(x; \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ <i>Merkmal:</i> Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u du$ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \cosh u$	1. $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$	$x = \sinh u$
		2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	$x = 2 \cdot \sinh u$
(F) $\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ <i>Merkmal:</i> Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u du$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sinh u$	1. $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$	$x = 3 \cdot \cosh u$
		2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$	$x = 5 \cdot \cosh u$

Anmerkungen zur Tabelle 2

- (1) Integrale vom Typ (B) bzw. (C) sind in *geschlossener Form* wie folgt lösbar:

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} [f(x)]^2 + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

- (2) Integrale vom Typ (D) bis (F): Die angegebenen Substitutionen *beseitigen* die Wurzeln. Man erhält Integrale mit *trigonometrischen* bzw. *hyperbolischen* Funktionen, die in der Regel noch keine Grund- oder Stammintegrale sind und daher (gegebenenfalls) mit einer anderen Methode bzw. unter Verwendung von Umrechnungsformeln weiterbehandelt werden müssen.
- (3) Weitere Integralsubstitutionen findet der Leser in der **Mathematischen Formelsammlung** (Kap. V, Abschnitt 3.1).

■ Beispiele

$$(1) \quad I = \int \frac{6x^2}{(1 - 4x^3)^3} dx = ?$$

Die *Substitution* $u = 1 - 4x^3$ scheint geeignet, da sie eine deutliche Vereinfachung im Nenner des Integranden bewirkt:

Substitutionsgleichungen:

$$u = 1 - 4x^3, \quad \frac{du}{dx} = -12x^2, \quad dx = \frac{du}{-12x^2} = \frac{du}{-2(6x^2)}$$

Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{6x^2}{(1 - 4x^3)^3} dx = \int \frac{6x^2}{u^3} \cdot \frac{du}{-2(6x^2)} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^3} du$$

Integration und Rücksubstitution:

Das neue Integral ist bereits ein *Grundintegral*. Mit Hilfe der *Potenzregel* der Integralrechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2} \cdot \int u^{-3} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = \\ &= \frac{1}{4u^2} + C = \frac{1}{4(1 - 4x^3)^2} + C \end{aligned}$$

Lösung:

$$\int \frac{6x^2}{(1 - 4x^3)^3} dx = \frac{1}{4(1 - 4x^3)^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad I = \int 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx = ?$$

Dieses Integral ist vom Typ (B) (der Faktor 2 stört nicht, da er vor das Integral gezogen werden darf) und lässt sich daher wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} u &= \sin x, & \frac{du}{dx} &= \cos x, & dx &= \frac{du}{\cos x} \\ I &= 2 \cdot \int \sin x \cdot \cos x \, dx = 2 \cdot \int u \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x} = 2 \cdot \int u \, du = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} u^2 + C = u^2 + C \end{aligned}$$

Rücksubstitution führt zur gesuchten Lösung:

$$I = \int 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin^2 x + C$$

$$(3) \quad I = \int \frac{3x^2 - 6}{x^3 - 6x + 1} \, dx = ?$$

Dieses unbestimmte Integral ist vom Integraltyp (C) aus Tabelle 2, da im Zähler des Integranden genau die *Ableitung* des Nenners steht. Wir lösen dieses Integral schrittweise wie folgt:

Substitutionsgleichungen (Nenner substituieren):

$$u = x^3 - 6x + 1, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 - 6, \quad dx = \frac{du}{3x^2 - 6}$$

Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{3x^2 - 6}{x^3 - 6x + 1} \, dx = \int \frac{3x^2 - 6}{u} \cdot \frac{du}{3x^2 - 6} = \int \frac{1}{u} \, du$$

Integration und Rücksubstitution:

Das neue Integral ist bereits ein *Grund- oder Stammintegral*:

$$I = \int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \ln |x^3 - 6x + 1| + C$$

Lösung:

$$\int \frac{3x^2 - 6}{x^3 - 6x + 1} \, dx = \ln |x^3 - 6x + 1| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(4) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx = ?$$

1. Lösungsweg: Wir lösen das bestimmte Integral durch die *Substitution* $u = \sin x$ mit anschließender Rücksubstitution, wobei wir zunächst *unbestimmt* integrieren.

Substitutionsgleichungen:

$$u = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

Integralsubstitution (ohne Grenzen, d. h. unbestimmt):

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

Integration und Rücksubstitution:

$$\int \frac{1}{1 + u^2} du = \arctan u + C = \arctan (\sin x) + C$$

Berechnung des bestimmten Integrals ($C = 0$ gesetzt, da die Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe einer *beliebigen* Stammfunktion des Integranden erfolgen kann):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\arctan (\sin x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \arctan \underbrace{(\sin (\pi/2))}_1 - \arctan \underbrace{(\sin 0)}_0 = \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Wir verwenden die *gleiche* Substitution, verzichten aber auf die Rücksubstitution. Dafür müssen die Integrationsgrenzen auf die neue Hilfsvariable u umgeschrieben werden.

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \sin 0 = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } x = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad u = \sin (\pi/2) = 1$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du = \left[\arctan u \right]_0^1 = \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- (5) Wir berechnen den *Flächeninhalt eines Kreises* vom Radius r (Bild V-22).

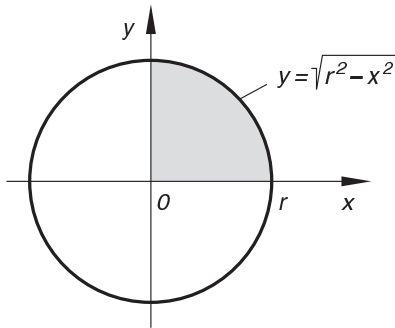


Bild V-22

Zur Berechnung des Flächeninhaltes
eines Kreises

Aus *Symmetriegründen* beschränken wir uns dabei auf den im 1. Quadranten liegenden *Viertelkreis* (in Bild V-22 grau unterlegt):

$$A_{\text{Kreis}} = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

Dieses Integral ist vom Typ (D) der Tabelle 2 und wird durch die *Substitution*

$$x = r \cdot \sin u, \quad dx = r \cdot \cos u \, du, \quad \sqrt{r^2 - x^2} = r \cdot \cos u$$

gelöst, wobei wir die Integrationsgrenzen *mitsubstituieren* wollen. Wir lösen daher die Substitutionsgleichung $x = r \cdot \sin u$ zunächst nach u auf:

$$x = r \cdot \sin u \Rightarrow \sin u = \frac{x}{r} \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

Mit dieser Beziehung berechnen wir dann die *neuen* Integrationsgrenzen:

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = \arcsin 0 = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } x = r \Rightarrow u = \arcsin 1 = \pi/2$$

Nach Durchführung der Substitution erhält man das folgende Integral:

$$\begin{aligned} A_{\text{Kreis}} &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} r \cdot \cos u \cdot r \cdot \cos u \, du = \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot \cos^2 u \, du = 4 r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du \end{aligned}$$

Dieses Integral ist zwar noch *kein* Grundintegral, kann jedoch mit Hilfe der aus der **Mathematischen Formelsammlung** entnommenen trigonometrischen Beziehung

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} (1 + \cos (2u))$$

wesentlich *vereinfacht* werden:

$$\begin{aligned} A_{\text{Kreis}} &= 4r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} (1 + \cos (2u)) \, du = \\ &= 2r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} 1 \, du + 2r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos (2u) \, du = \\ &= 2r^2 \left[u \right]_0^{\pi/2} + 2r^2 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos (2u) \, du}_0 = \\ &= 2r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 2r^2 \cdot 0 = \pi r^2 \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos (2u) \, du$ auch tatsächlich *verschwindet*. Dieses Integral ist vom Typ (A) aus Tabelle 2 und wird durch die folgende lineare Substitution gelöst (die Substitutionsvariable bezeichnen wir mit t):

$$t = 2u, \quad \frac{dt}{du} = 2, \quad du = \frac{1}{2} dt$$

Die *neuen* Integrationsgrenzen in t sind dabei ($t = 2u$):

$$\text{Untere Grenze: } u = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } u = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = \pi$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos (2u) \, du &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \left[\sin t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 0) = \\ &= \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

■

8.2 Partielle Integration oder Produktintegration

Aus der *Produktregel* der Differentialrechnung in der speziellen Form

$$\frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (\text{V-60})$$

gewinnt man durch Umformung und anschließende Integration eine unter der Bezeichnung *Partielle Integration* oder *Produktintegration* bekannte Integrationsmethode. Zunächst wird Gleichung (V-60) wie folgt umgestellt:

$$u(x) \cdot v'(x) = \frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) - u'(x) \cdot v(x) \quad (\text{V-61})$$

Unbestimmte Integration auf beiden Seiten führt dann zu

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \int \frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{V-62})$$

Dabei gilt:

$$\int \frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) dx = u(x) \cdot v(x) \quad (\text{V-63})$$

Denn die (unbestimmte) Integration ist ja bekanntlich die *Umkehrung* der Differentiation, hebt diese also auf. Die Integrationskonstante wird an dieser Stelle üblicherweise weggelassen, muss jedoch gegebenenfalls im Endergebnis hinzugefügt werden. Gleichung (V-62) kann daher auch in der Form

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{V-64})$$

geschrieben werden. Diese Beziehung wird in der mathematischen Literatur als *Formel der partiellen Integration* bezeichnet (auch *Produktintegration* genannt) und ermöglicht unter gewissen Voraussetzungen die Integration einer Funktion $f(x)$, wie wir gleich zeigen werden⁵⁾.

Bei der Berechnung eines Integrals $\int f(x) dx$ mittels *partieller Integration* wird der Integrand $f(x)$ zunächst in „geeigneter“ Weise in zwei Faktorfunktionen zerlegt, die wir mit $u(x)$ und $v'(x)$ bezeichnen wollen:

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x) \quad (\text{V-65})$$

Dabei ist $v'(x)$ die *Ableitung* einer (zunächst noch *unbekannten*) Funktion $v(x)$.

⁵⁾ Der Nutzen dieser etwas seltsamen Formel ist auf den ersten Blick nur schwer zu erkennen.

Das Integral $\int f(x) dx$ lässt sich dann auch wie folgt schreiben:

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx \quad (\text{V-66})$$

Unter Verwendung der Formel (V-64) wird hieraus schließlich:

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{V-67})$$

Damit haben wir Folgendes erreicht:

Das Ausgangsintegral $\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx$ lässt sich nach dieser Formel auf „indirektem“ Wege über das *Hilfsintegral* $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ der rechten Gleichungsseite berechnen, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Zu der Faktorfunktion $v'(x)$ lässt sich problemlos eine *Stammfunktion* $v(x)$ finden.
2. Das auf der rechten Seite stehende *Hilfsintegral* $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ ist *elementar* lösbar und im Idealfall ein *Grund-* oder *Stammintegral*.

Die Erfahrung zeigt, dass man dieses Ziel in vielen (aber nicht allen) Fällen mit Hilfe einer „geeigneten“ Zerlegung des Integranden erreichen kann.

Wir fassen diese wichtigen Ergebnisse wie folgt zusammen:

**Berechnung eines Integrals mittels partieller Integration
(auch „Produktintegration“ genannt)**

Der Integrand $f(x)$ des vorgegebenen unbestimmten Integrals $\int f(x) dx$ wird zunächst in „geeigneter“ Weise in ein *Produkt* aus einer Funktion $u(x)$ und der *Ableitung* $v'(x)$ einer (zunächst noch unbekannten) Funktion $v(x)$ zerlegt:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zerlegung in ein Produkt}}} dx = \int \underbrace{u(x) \cdot v'(x)}_{\uparrow} dx$$

Dieses Integral lässt sich dann auch wie folgt darstellen (sog. *Formel der partiellen Integration*):

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{V-68})$$

Die Integration *gelingt*, wenn die Faktorfunktionen $u(x)$ und $v'(x)$ die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

1. Zu der Faktorfunktion $v'(x)$ lässt sich *problemlos* eine *Stammfunktion* $v(x)$ bestimmen.
2. Das auf der rechten Seite der Integrationsformel (V-68) auftretende „*Hilfsintegral*“ $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ ist *elementar* lösbar, im Idealfall sogar ein *Grund- oder Stammintegral*.

Anmerkungen

- (1) Ob die Integration nach der Formel (V-68) gelingt, hängt im Wesentlichen von der „*richtigen*“, d. h. *sinnvollen Zerlegung* des Integranden $f(x)$ in die beiden Faktorfunktionen $u(x)$ und $v'(x)$ ab. Insbesondere $v'(x)$ muss so gewählt werden, dass sich ohne Schwierigkeiten eine Stammfunktion $v(x)$ angeben lässt ($v'(x)$ ist der „*kritische*“ Faktor).
- (2) In einigen Fällen muss man das Integrationsverfahren *mehrmals* nacheinander anwenden, ehe man auf ein Grundintegral stößt (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (3)).
- (3) Häufig führt die *Partielle Integration* zwar auf ein einfacheres Integral, das aber noch *kein* Grund- oder Stammintegral darstellt. In diesem Fall muss das „neue“ Integral nach einer *anderen* Integrationsmethode (z. B. mittels einer Integralsubstitution) weiterbehandelt werden, bis man schließlich auf ein *Grundintegral* stößt.
- (4) Die Formel der partiellen Integration gilt sinngemäß auch für *bestimmte* Integrale. Sie lautet dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{V-69})$$

- (5) Die Integrale in der Formel (V-68) müssen natürlich existieren. Dies ist der Fall, wenn $u(x)$ und $v(x)$ *stetig differenzierbare* Funktionen sind.

■ Beispiele

$$(1) \quad \int x \cdot e^x dx = ?$$

Wir zerlegen den Integrand $f(x) = x \cdot e^x$ wie folgt:

$$u(x) = x, \quad v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = e^x$$

Die *Formel der partiellen Integration* liefert dann unmittelbar ein *elementar* lösbares Integral:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ u & v' & & u & v & & u' & v \end{array} \\ &= x \cdot e^x - e^x + C = (x - 1) \cdot e^x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die *Art* der Zerlegung des Integranden von *entscheidender* Bedeutung ist, wollen wir diesmal im gleichen Integral eine andere Zerlegung des Integranden $f(x) = x \cdot e^x$ vornehmen und zwar:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = x \cdot e^x & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ v' & u & \end{array}$$

Auch bei dieser Zerlegung lässt sich zum „kritischen“ Faktor $v'(x) = x$ *problemlos* eine *Stammfunktion* bestimmen:

$$u(x) = e^x, \quad v'(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = e^x, \quad v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Die *Formel der Partiellen Integration* führt diesmal aber zu einem „Hilfsintegral“, das nicht etwa (wie gewünscht) einfacher, sondern sogar *komplizierter* gebaut ist als das Ausgangsintegral:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= e^x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int e^x \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int x^2 \cdot e^x dx}_{\text{Dieses Integral ist komplizierter gebaut als das Ausgangsintegral}} \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ v' & u & & u & v & & u' & v \end{array} \end{aligned}$$

Die vorgenommene Zerlegung des Integranden ist keineswegs „falsch“, offensichtlich jedoch „*ungeeignet*“, d. h. mit dieser Zerlegung lässt sich das Ausgangsintegral $\int x \cdot e^x dx$ *nicht* in ein elementar lösbares Integral bzw. in ein Grund- oder Stammintegral überführen (die Potenz im Integral hat sich bei dieser Zerlegung *erhöht*: $x \rightarrow x^2$).

- (2) Das unbestimmte Integral $\int \ln x \, dx$ lässt sich auch in der Form

$$\int \ln x \, dx = \int (\ln x) \cdot 1 \, dx$$

darstellen („mathematischer Trick“: Faktor 1 ergänzen). Wir nehmen jetzt die folgende Zerlegung des Integranden $f(x) = (\ln x) \cdot 1$ vor:

$$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = x$$

Damit gilt nach Formel (V-68):

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int (\ln x) \cdot 1 \, dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v' & & u & v & u' & v \end{array} \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C = \\ &= x(\ln x - 1) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- (3) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx = ?$

Mit der *Zerlegung*

$$u(x) = x^2, \quad v'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x, \quad v(x) = \sin x$$

erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \cos x \, dx &= x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v' & & u & v & u' & v \end{array} \\ &= x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot \underbrace{\int x \cdot \sin x \, dx}_I = x^2 \cdot \sin x - 2I \end{aligned}$$

Das dabei auftretende Hilfsintegral $I = \int x \cdot \sin x \, dx$ ist zwar *einfacher* gebaut als das Ausgangsintegral (*Potenzerniedrigung*: $x^2 \rightarrow x$), aber leider noch *kein* Grundintegral. Es lässt sich aber nach der gleichen Integrationstechnik weiterbehandeln. Wir zerlegen nun wie folgt (konsequenterweise müssen wir wieder die Potenz – hier also x – mit u bezeichnen):

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = -\cos x$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 I &= \int x \cdot \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = \\
 &\quad \begin{array}{cccccc}
 \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 u & v' & u & v & u' & v
 \end{array} \\
 &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C_1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir das Ausgangsintegral $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ gelöst:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \cdot \cos x \, dx &= x^2 \cdot \sin x - 2I = \\
 &= x^2 \cdot \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x + C_1) = \\
 &= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x - 2C_1 = \\
 &= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x + C
 \end{aligned}$$

Dabei wurde $C = -2C_1$ gesetzt ($C_1, C \in \mathbb{R}$).

$$(4) \quad \int x^n \cdot e^{ax} \, dx = ? \quad (n \in \mathbb{N}^*; a \in \mathbb{R})$$

Wir nehmen zunächst die folgende *Zerlegung* vor:

$$u(x) = x^n, \quad v'(x) = e^{ax} \Rightarrow u'(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad v(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$$

und erhalten nach der *Formel der Partiellen Integration* (V-68):

$$\int x^n \cdot e^{ax} \, dx = uv - \int u'v \, dx = \frac{1}{a} \cdot x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a} \cdot \int x^{n-1} \cdot e^{ax} \, dx$$

Damit haben wir das Ausgangsintegral $\int x^n \cdot e^{ax} \, dx$ gegen ein *einfacher* gebau-
tes Integral vom *gleichen* Typ eingetauscht (der Exponent hat sich um 1 *verkleinert*!). Formeln dieser Art bezeichnet man als *Rekursionsformeln*. Durch *mehrmaliges* Anwenden dieser Formel (hier: n -mal) gelangt man schließlich zu dem „Grundintegral“ $\int e^{ax} \, dx$.

Rechenbeispiel

$$\int x^2 \cdot e^{4x} \, dx = ? \quad n = 2, \quad a = 4$$

Der 1. Schritt führt zu:

$$\int x^2 \cdot e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} x^2 \cdot e^{4x} - \frac{2}{4} \cdot \underbrace{\int x \cdot e^{4x} \, dx}_I = \frac{1}{4} x^2 \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} I$$

Im 2. Schritt wenden wir dieselbe Rekursionsformel auf das neue (aber einfachere) Integral der rechten Seite an (diesmal ist $n = 1$ und $a = 4$):

$$\begin{aligned} I &= \int x \cdot e^{4x} dx = \frac{1}{4} x \cdot e^{4x} - \frac{1}{4} \cdot \int 1 \cdot e^{4x} dx = \\ &= \frac{1}{4} x \cdot e^{4x} - \frac{1}{16} \cdot e^{4x} + C_1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4} x^2 \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} I = \\ &= \frac{1}{4} x^2 \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x \cdot e^{4x} - \frac{1}{16} \cdot e^{4x} + C_1 \right) = \\ &= \frac{1}{4} x^2 \cdot e^{4x} - \frac{1}{8} x \cdot e^{4x} + \frac{1}{32} \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} C_1 = \\ &= \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \right) \cdot e^{4x} + C \end{aligned}$$

Dabei wurde $C = -C_1/2$ gesetzt ($C_1, C \in \mathbb{R}$). ■

8.3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden

Für *echt* gebrochenrationale Funktionen ist eine spezielle Integrationstechnik unter der Bezeichnung „*Integration durch Partialbruchzerlegung*“ entwickelt worden. Wir werden sie im Folgenden ausführlich behandeln.

Ist die Funktion jedoch *unecht* gebrochen, so muss sie zunächst in eine *ganzrationale* und eine *echt* gebrochenrationale Funktion zerlegt werden. Diese Zerlegung ist *stets* möglich und *eindeutig* (siehe hierzu Kap. III, Abschnitt 6.3). Wir geben zunächst ein Beispiel.

■ Beispiel

Die *unecht* gebrochenrationale Funktion $y = \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4}$ wird durch *Polynomdivision* in einen *ganzrationalen* und einen *echt* gebrochenrationalen Anteil zerlegt:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 4) = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4} \\ \underline{-(2x^3 \qquad - 8x)} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad -14x^2 + 22x + 30 \\ \underline{-(-14x^2 + \qquad + 56)} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad 22x - 26 \end{array}$$

Ganzrationaler Anteil: $p(x) = 2x - 14$

Echt gebrochenrationaler Anteil: $r(x) = \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$ ■

8.3.1 Partialbruchzerlegung

Jede *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich mit Hilfe *algebraischer* Methoden in eindeutiger Weise in eine endliche Summe aus sog. *Partial-* oder *Teilbrüchen* zerlegen, die dann ohne große Schwierigkeiten gliedweise integriert werden können ($Z(x)$: Zählerpolynom, $N(x)$: Nennerpolynom).

Wir gehen dabei wie folgt vor:

Partialbruchzerlegung einer echt gebrochenrationalen Funktion

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partial-* oder *Teilbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die reellen *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfachheit* bestimmt⁶⁾.
2. *Jeder* Nullstelle des Nennerpolynoms wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet:

$$x_1: \text{Einfache Nullstelle} \rightarrow \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1: \text{Zweifache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$\vdots$$

$$x_1: r\text{-fache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

$A, A_1, A_2, \dots, A_r$ sind dabei (zunächst noch unbekannte) Konstanten.

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar (Anzahl der Partialbrüche = Anzahl der Nullstellen des Nennerpolynoms $N(x)$).
4. *Bestimmung der in den Partialbrüchen auftretenden Konstanten*: Zunächst werden alle Brüche auf einen *gemeinsamen Nenner (Hauptnenner)* gebracht. Durch Einsetzen geeigneter x -Werte (z. B. der Nennernullstellen) erhält man ein einfaches *lineares Gleichungssystem* für die unbekannten Konstanten, das z. B. mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* gelöst werden kann.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Konstanten ist der *Koeffizientenvergleich*.

⁶⁾ Wir setzen hier voraus, dass der Nenner *ausschließlich* reelle Nullstellen besitzt (zum Vorgehen bei *komplexen* Nullstellen siehe *Formelsammlung*, Kap. V, Abschnitt 3.3).

■ Beispiele

- (1) Der Nenner einer echt gebrochenrationalen Funktion besitze die folgenden *einfachen* Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ und $x_3 = -4$. Die zugehörigen *Partialbrüche* lauten dann der Reihe nach:

$$\frac{A}{x-2}, \quad \frac{B}{x-5}, \quad \frac{C}{x+4}$$

- (2) Wie lautet die *Partialbruchzerlegung* der *echt* gebrochenrationalen Funktion

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}?$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die *Nennernullstellen*:

$$N(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_{2/3} = 2$$

($x_1 = 1$ durch Probieren gefunden; das Horner-Schema liefert dann das 1. reduzierte Polynom, aus dem sich die weiteren Nullstellen ergeben). Ihnen ordnen wir die folgenden *Partialbrüche* zu:

$$x_1 = 1 \text{ (einfache Nullstelle)} \rightarrow \frac{A}{x-1}$$

$$x_{2/3} = 2 \text{ (doppelte Nullstelle)} \rightarrow \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Damit lässt sich die Funktion $f(x)$ wie folgt darstellen (Zerlegung in *Partialbrüche*):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Um die Konstanten A , B und C bestimmen zu können, müssen die Brüche zunächst *gleichnamig* gemacht werden (*Hauptnenner*: $(x-1)(x-2)^2$; die Brüche müssen der Reihe nach mit $(x-2)^2$, $(x-1)(x-2)$ bzw. $(x-1)$ erweitert werden):

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Aus dieser Gleichung folgt dann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

Wir setzen jetzt der Reihe nach die Werte $x = 1$, $x = 2$ (also die beiden Nullstellen des Nenners) und $x = 0$ ein und erhalten ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten A , B und C :

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow 2 = A \Rightarrow A = 2$$

$$\boxed{x = 2} \Rightarrow 3 = C \Rightarrow C = 3$$

$$\begin{aligned} \boxed{x = 0} &\Rightarrow 1 = 4A + 2B - C \Rightarrow 1 = 4 \cdot 2 + 2B - 3 \\ &\Rightarrow 1 = 5 + 2B \Rightarrow 2B = -4 \Rightarrow B = -2 \end{aligned}$$

Die gesuchte *Partialbruchzerlegung* lautet damit:

$$\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \quad \blacksquare$$

8.3.2 Integration der Partialbrüche

Die in der *Partialbruchzerlegung* einer *echt* gebrochenrationalen Funktion auftretenden Funktionen sind vom Typ⁷⁾

$$\frac{1}{x-x_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{(x-x_1)^n} \quad (n \geq 2) \quad (\text{V-70})$$

Mit Hilfe der *Substitution* $u = x - x_1$, $\frac{du}{dx} = 1$ und somit $dx = du$ ist ihre Integration *elementar* durchführbar und liefert die folgenden Lösungen ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$):

$$\int \frac{dx}{x-x_1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C_1 = \ln |x-x_1| + C_1 \quad (\text{V-71})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-x_1)^n} &= \int \frac{du}{u^n} = \int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C_2 = \frac{1}{(1-n)u^{n-1}} + C_2 = \\ &= \frac{1}{(1-n)(x-x_1)^{n-1}} + C_2 \end{aligned} \quad (\text{V-72})$$

⁷⁾ Die in den Partialbrüchen auftretenden Konstanten können bei der Integration *vor* das Integral gezogen werden und haben somit *keinen* Einfluss auf die nachfolgenden Überlegungen.

Bevor wir das beschriebene Verfahren zur *Integration gebrochenrationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung des Integranden* auf konkrete Beispiele anwenden, fassen wir die einzelnen Schritte, die zur *Integration* führen, wie folgt zusammen:

Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung

Die Integration einer *gebrochenrationalen* Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ wird nach dem folgenden Schema durchgeführt:

1. Zerlegung von $f(x)$ in eine *ganzrationale* Funktion $p(x)$ und eine *echt gebrochenrationale* Funktion $r(x)$ (z. B. durch Polynomdivision)⁸⁾:

$$f(x) = p(x) + r(x) \quad (\text{V-73})$$

2. Darstellung des *echt gebrochenrationalen* Anteils $r(x)$ als *Summe von Partialbrüchen* (sog. *Partialbruchzerlegung*).
3. *Integration des ganzrationalen* Anteils $p(x)$ und *sämtlicher* Partialbrüche.

■ Beispiele

$$(1) \quad \int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx = ?$$

Der Integrand ist *unecht* gebrochenrational und wird durch *Polynomdivision* in einen *ganzrationalen* und einen *echt gebrochenrationalen* Anteil zerlegt (diese Zerlegung wurde bereits zu Beginn dieses Abschnitts durchgeführt):

$$f(x) = \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

Zerlegung des echt gebrochenrationalen Anteils in Partialbrüche

$$r(x) = \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

Nullstellen des Nenners: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

Zuordnung der Partialbrüche:

$$x_1 = 2 \text{ (einfache Nullstelle)} \rightarrow \frac{A}{x - 2}$$

$$x_2 = -2 \text{ (einfache Nullstelle)} \rightarrow \frac{B}{x + 2}$$

⁸⁾ Diese Zerlegung *entfällt*, wenn die Funktion $f(x)$ bereits *echt* gebrochenrational ist.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{22x - 26}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

Bestimmung der Konstanten A und B (zunächst Hauptnenner bilden):

$$\begin{aligned} \frac{22x - 26}{(x - 2)(x + 2)} &= \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \Rightarrow \\ 22x - 26 &= A(x + 2) + B(x - 2) \end{aligned}$$

Wir setzen für x der Reihe nach die Werte der beiden Nennernullstellen ein:

$$\boxed{x = 2} \Rightarrow 18 = 4A \Rightarrow A = 4,5$$

$$\boxed{x = -2} \Rightarrow -70 = -4B \Rightarrow B = 17,5$$

Die Partialbruchzerlegung ist damit abgeschlossen. Sie lautet:

$$\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{4,5}{x - 2} + \frac{17,5}{x + 2}$$

Durchführung der Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx &= \int (2x - 14) dx + \int \frac{22x - 26}{x^2 - 4} dx = \\ &= x^2 - 14x + \int \left(\frac{4,5}{x - 2} + \frac{17,5}{x + 2} \right) dx = \\ &= x^2 - 14x + 4,5 \cdot \ln |x - 2| + 17,5 \cdot \ln |x + 2| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} dx = ?$$

Der Integrand ist bereits *echt* gebrochenrational. Wir zerlegen ihn in *Partialbrüche*. Zunächst werden die *Nullstellen des Nenners* ermittelt:

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (3-fach)}, \quad x_2 = -3$$

Die zugehörigen *Partialbrüche* lauten daher:

$$\begin{aligned} x_1 = 1 \text{ (3-fache Nullstelle)} &\rightarrow \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} \\ x_2 = -3 \text{ (einfache Nullstelle)} &\rightarrow \frac{B}{x + 3} \end{aligned}$$

Die Integrandfunktion ist daher in der Form

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} &= \frac{x^2 - 5x + 8}{(x-1)^3(x+3)} = \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x+3}\end{aligned}$$

darstellbar.

Bestimmung der Konstanten A_1, A_2, A_3 und B (Hauptnenner bilden):

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 5x + 8}{(x-1)^3(x+3)} &= \\ &= \frac{A_1(x-1)^2(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x+3) + B(x-1)^3}{(x-1)^3(x+3)}\end{aligned}$$

Die Gleichung wird beiderseits mit dem Hauptnenner $(x-1)^3(x+3)$ multipliziert:

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 8 &= \\ &= A_1(x-1)^2(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x+3) + B(x-1)^3\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 1} \quad \Rightarrow \quad 4 = 4A_3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = 1$$

$$\boxed{x = -3} \quad \Rightarrow \quad 32 = -64B \quad \Rightarrow \quad B = -0,5$$

$$\boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \quad 8 = 3A_1 - 3A_2 + 3A_3 - B$$

$$8 = 3A_1 - 3A_2 + 3 + 0,5$$

$$4,5 = 3A_1 - 3A_2 \quad | : 3$$

$$(I) \quad 1,5 = A_1 - A_2 \quad \text{oder} \quad A_1 - A_2 = 1,5$$

$$\boxed{x = -1} \quad \Rightarrow \quad 14 = 8A_1 - 4A_2 + 2A_3 - 8B$$

$$14 = 8A_1 - 4A_2 + 2 + 4$$

$$8 = 8A_1 - 4A_2 \quad | : 4$$

$$(II) \quad 2 = 2A_1 - A_2 \quad \text{oder} \quad 2A_1 - A_2 = 2$$

Aus den Gleichungen (I) und (II) folgt durch Differenzbildung:

$$\begin{array}{rcll} (I) & A_1 - A_2 = 1,5 & \Bigg\} - \\ (II) & 2A_1 - A_2 = 2 & \Bigg\} - \\ \hline & -A_1 & = -0,5 & \Rightarrow A_1 = 0,5 \Rightarrow A_2 = -1 \end{array}$$

Die *Partialbruchzerlegung* ist damit vollzogen:

$$\frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} = \frac{0,5}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{0,5}{x+3}$$

Durchführung der (gliedweisen) Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} dx &= \\ &= \int \frac{0,5}{x-1} dx - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{0,5}{x+3} dx = \\ &= 0,5 \cdot \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} - 0,5 \cdot \ln |x+3| + C = \\ &= 0,5 \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

■

8.4 Numerische Integrationsmethoden

In vielen Fällen ist die Integration einer stetigen Funktion in geschlossener Form nicht möglich oder aber vom Arbeits- und Rechenaufwand her nicht vertretbar. So sind wir beispielsweise nicht in der Lage, das in der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *Statistik* so

bedeutende Integral $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ durch einen analytischen Funktionsausdruck zu

beschreiben. In diesem Fall ist man dann auf die *punktweise* Berechnung der Stammfunktion unter Verwendung spezieller *Näherungsverfahren* angewiesen (sog. *numerische Integration*)⁹⁾. *Numerische* Integrationstechniken sind daher ihrem Charakter nach stets *Näherungsverfahren* und können in den folgenden Fällen zur Lösung des Problems herangezogen werden:

- Das Integral ist elementar, d. h. in geschlossener Form *nicht* lösbar.
- Der Integrand ist in Form einer *Wertetabelle* gegeben.
- Der Integrand liegt als *Funktionskurve* (Funktionsgraph) vor.
- Die Integration ist in geschlossener Form zwar grundsätzlich durchführbar, jedoch zu *aufwändig*.

Wir behandeln in diesem Abschnitt zwei Näherungsverfahren zur Berechnung bestimmter Integrale (*Trapezformel*, *Simpsonsche Formel*). In beiden Fällen setzen wir bei der Herleitung der FormelAusdrücke voraus, dass die *stetige* Integrandfunktion $y = f(x)$ im Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ *oberhalb* der x -Achse verläuft, so dass das bestimmte

⁹⁾ Eine weitere Möglichkeit besteht in der *Potenzreihenentwicklung* des Integranden und anschließender (gliedweiser) Integration (siehe hierzu Kap. VI, Abschnitt 3.3.2).

Integral $\int_a^b f(x) dx$ als *Flächeninhalt* interpretiert werden darf. Die Fläche wird dann (ähnlich wie bei der Einführung des Begriffes „bestimmtes Integral“ in Abschnitt 2) in *achsenparallele* Streifen gleicher Breite zerlegt. Anschließend werden die oberen Berandungen der Streifen durch *möglichst einfache* Kurven ersetzt (Geraden, Parabeln).

8.4.1 Trapezformel

Wir zerlegen das Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ in n Teilintervalle *gleicher* Länge h (auch *Schrittweite* genannt):

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (\text{V-74})$$

Die Randpunkte der Teilintervalle werden als *Stützstellen* bezeichnet. Sie lauten der Reihe nach (Bild V-23):

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = x_0 + h = a + h, \quad x_2 = x_0 + 2h = a + 2h, \quad \dots \\ \dots, \quad x_k &= x_0 + k \cdot h = a + k \cdot h, \quad \dots, \quad x_n = b \end{aligned} \quad (\text{V-75})$$

Die zugehörigen Funktionswerte y_k heißen *Stützwerte*:

$$y_k = f(x_k) = f(x_0 + k \cdot h) = f(a + k \cdot h) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{V-76})$$

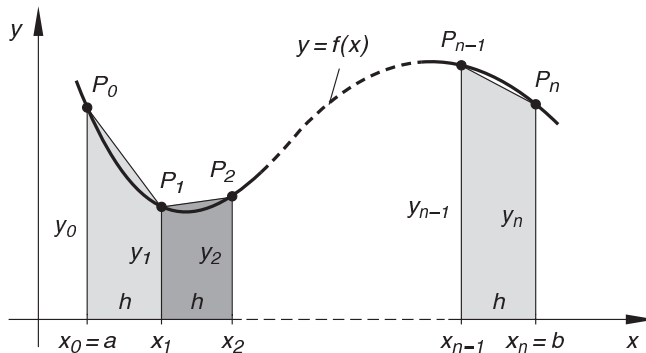
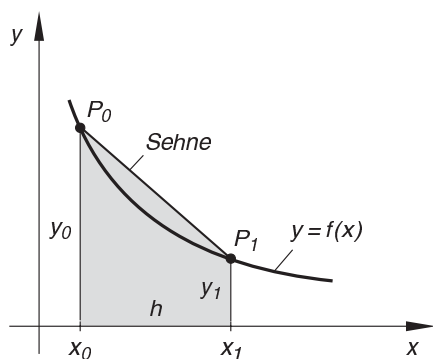


Bild V-23 Zur Herleitung der Trapezformel

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ zerfällt damit in n achsenparallele Streifen der Breite h . Ersetzt man in *jedem* Streifen den dortigen *Kurvenbogen* durch die *Sehne* (diese verläuft geradlinig durch die beiden Randpunkte), so erhält man eine *Näherung* in Form eines *Trapezes*.

**Bild V-24**

Zur näherungsweisen Berechnung
des 1. Flächenstreifens bei der Trapezformel

So wird beispielsweise der 1. Streifen durch das in Bild V-24 grau unterlegte Trapez vom Flächeninhalt

$$A_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} h \quad (\text{V-77})$$

ersetzt¹⁰⁾. Analog erhält man für die Flächeninhalte der übrigen $n - 1$ Streifen näherungsweise

$$A_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} h, \quad A_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} h, \quad \dots, \quad A_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h \quad (\text{V-78})$$

Für großes n ist die Summe aller Trapezflächen eine gute Näherung für den gesuchten Flächeninhalt. Wir erhalten somit die folgende Näherungsformel:

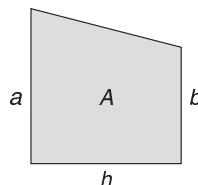
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \\ &= \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h = \\ &= \left[(y_0 + y_1) + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{2y_1} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{2y_2} + \underbrace{(y_3 + y_4)}_{2y_3} + \dots + \underbrace{(y_{n-1} + y_n)}_{2y_{n-1}} \right] \frac{h}{2} = \\ &= \left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n \right) \frac{h}{2} \quad (\text{V-79}) \end{aligned}$$

Die inneren Ordinaten (Stützwerte) treten dabei *doppelt* auf. Wir können diesen Ausdruck noch wie folgt vereinfachen:

¹⁰⁾ Der Flächeninhalt eines Trapezes wird nach der aus der Elementarmathematik bekannten Formel

$$A = \frac{a + b}{2} h$$

berechnet (siehe hierzu Bild V-25).

**Bild V-25**

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \left(\underbrace{(y_0 + y_n)}_{\Sigma_1} + 2 \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})}_{\Sigma_2} \right) \frac{h}{2} = \\
 &= \left(\Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2 \right) \frac{h}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h \quad (\text{V-80})
 \end{aligned}$$

Diese Formel gestattet die *näherungsweise* Berechnung eines bestimmten Integrals, wenn von der Integrandfunktion $n + 1$ *Stützpunkte* (Funktionswerte) bekannt sind (sog. *Trapezformel*).

Wir fassen zusammen:

Trapezformel (Bild V-23)

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \left[\frac{1}{2} \underbrace{(y_0 + y_n)}_{\Sigma_1} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})}_{\Sigma_2} \right] h = \\
 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h \quad (\text{V-81})
 \end{aligned}$$

Dabei bedeuten:

y_k : Stützpunkte der Funktion $y = f(x)$, berechnet an den Stützstellen
 $x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, 1, \dots, n)$

h : Streifenbreite (Schrittweite) $\left(h = \frac{b - a}{n} \right)$

Σ_1 : Summe der beiden *äußeren* Stützpunkte (Ordinaten der beiden *Randpunkte*)

Σ_2 : Summe der *inneren* Stützpunkte

Anmerkungen

- (1) Die Näherung durch die Trapezformel (V-81) ist umso *besser*, je *feiner* die Intervallunterteilung ist. Sie liefert für $n \rightarrow \infty$ den *exakten* Integralwert.
- (2) Die Trapezformel gilt *unabhängig* von der *geometrischen* Interpretation, sofern der Integrand $f(x)$ eine *stetige* Funktion ist.
- (3) Die Randkurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wird bei diesem Näherungsverfahren durch einen *Streckenzug* ersetzt (stückweise geradlinige Berandung).
- (4) Man beachte: Die Stützpunkte gehen mit *unterschiedlichen* Gewichtungsfaktoren in die Rechnung ein (Randordinaten mit dem Faktor $1/2$, innere Ordinaten mit dem Faktor 1).

■ Beispiel

Wir berechnen das Integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *näherungsweise* für $n = 5$ bzw. $n = 10$ Streifen.

Zerlegung in $n = 5$ Streifen (siehe Bild V-26)

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} y_5 \right) h = \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h$$

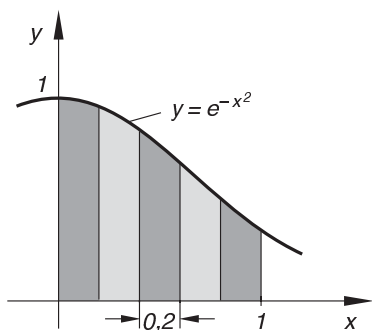


Bild V-26

Näherungsweise Berechnung des Integrals

$\int_0^1 e^{-x^2} dx$ nach der *Trapezformel*
für $n = 5$ Streifen der Breite $h = 0,2$

Streifenbreite (Schrittweite): $h = 0,2$

k	Stützstellen x_k	Stützwerte $y_k = e^{-x_k^2}$	
0	0	1	
1	0,2		0,9608
2	0,4		0,8521
3	0,6		0,6977
4	0,8		0,5273
5	1	0,3679	
		$\Sigma_1 = 1,3679$	$\Sigma_2 = 3,0379$

Die Trapezformel liefert damit für $n = 5$ Streifen den folgenden *Näherungswert*:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,3679 + 3,0379 \right) \cdot 0,2 = 0,7444$$

Die Abweichung des Näherungswertes 0,7444 vom *exakten* Wert 0,7468 (auf vier Stellen nach dem Komma genau) beträgt rund 0,3%.

Zerlegung in $n = 10$ Streifen

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_9 + \frac{1}{2} y_{10} \right) h = \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h$$

Streifenbreite (Schrittweite): $h = 0,1$

k	Stützstellen x_k	Stützwerte $y_k = e^{-x_k^2}$	
0	0	1	
1	0,1		0,9900
2	0,2		0,9608
3	0,3		0,9139
4	0,4		0,8521
5	0,5		0,7788
6	0,6		0,6977
7	0,7		0,6126
8	0,8		0,5273
9	0,9		0,4449
10	1	0,3679	
		$\Sigma_1 = 1,3679$	$\Sigma_2 = 6,7781$

Hinweis zu dieser Tabelle

Die Stützwerte aus der vorherigen Zerlegung in $n = 5$ Streifen konnten unverändert *übernommen* werden, die *zusätzlich* benötigten Ordinatenwerte befinden sich in den *grau* unterlegten Zeilen (es handelt sich dabei um die Stützwerte y_1, y_3, y_5, y_7 und y_9).

Die Trapezformel (V-81) liefert dann für $n = 10$ Streifen den folgenden *Näherungswert*, der nur noch um rund 0,1% *unterhalb* des exakten Wertes 0,7468 liegt:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,3679 + 6,7781 \right) \cdot 0,1 = 0,7462$$

■

8.4.2 Simpsonsche Formel

Die nach der *Trapezformel* (V-81) berechneten Näherungswerte konvergieren *relativ langsam* gegen den exakten Integralwert: Die *geradlinige* Berandung der Streifen durch die *Sehne* ist offenbar eine zu *grobe* Näherung. Zu besseren Ergebnissen gelangt man, wenn man nach *Simpson* die krummlinige obere Begrenzung der einzelnen Flächenstreifen durch *parabelförmige* Randkurven ersetzt.

Das numerische Integrationsverfahren nach *Simpson* geht dabei von den folgenden Überlegungen aus: Zunächst wird das Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ in eine *gerade* Anzahl $2n$ von Teilintervallen *gleicher* Länge (*Schrittweite*)

$$h = (b - a)/2n \quad (\text{V-82})$$

zerlegt. Dies führt zu den $2n + 1$ *Stützstellen*

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = x_0 + h = a + h, \quad x_2 = x_0 + 2h = a + 2h, \quad \dots \\ \dots, \quad x_k &= x_0 + k \cdot h = a + k \cdot h, \quad \dots, \quad x_{2n} = b \end{aligned} \quad (\text{V-83})$$

mit den *Stützwerten* (Funktionswerten)

$$y_k = f(x_k) = f(a + k \cdot h) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \quad (\text{V-84})$$

(Bild V-27). Man erhält auf diese Weise genau $2n$ sog. „einfache“ Streifen. Dann werden jeweils *zwei benachbarte* (einfache) Streifen zu einem sog. *Doppelstreifen* zusammengefasst. Aus $2n$ *einfachen* Streifen der Breite h entstehen daher genau n *Doppelstreifen* der Breite $2h$ (in Bild V-27 abwechselnd hell- und dunkelgrau unterlegt) und es ist unmittelbar einleuchtend, warum das Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ in eine *gerade* Anzahl von Teilintervallen zerlegt werden muss.

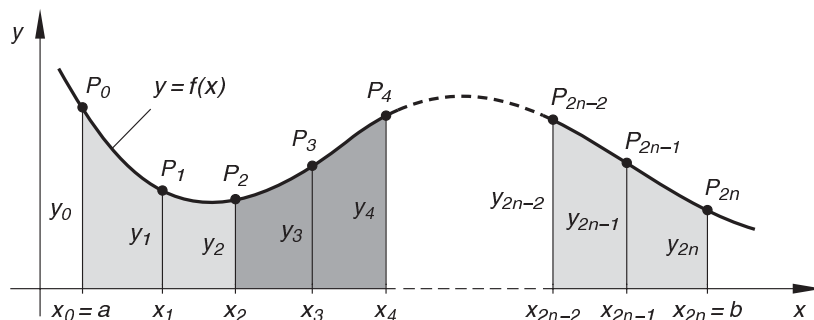


Bild V-27 Zur Herleitung der Simpsonschen Formel
(Zerlegung der Fläche in $2n$ „einfache“ Streifen der Breite h)

Wir gehen jetzt zur *näherungsweise* Berechnung des Flächeninhalts der n *Doppelstreifen* über. In dem 1. *Doppelstreifen* (hellgrau unterlegt in Bild V-28) wird die *krummlinige* Berandung durch eine durch die drei Kurvenpunkte P_0 , P_1 und P_2 verlaufende *Parabel* mit der Funktionsgleichung

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (\text{V-85})$$

ersetzt (Bild V-28).

Die Koeffizienten a_2, a_1, a_0 in der Parabelgleichung (V-85) sind dabei *eindeutig* durch die Koordinaten der drei Punkte bestimmt. Sie brauchen jedoch (wie sich etwas später noch zeigen wird) *nicht* berechnet zu werden, da sie nur *indirekt* in die Endformel eingehen.

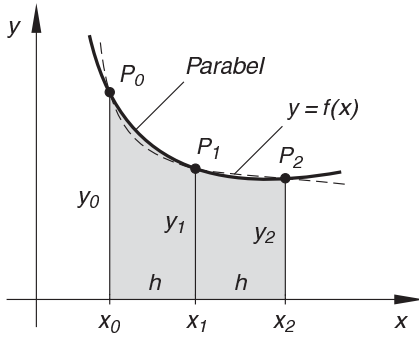


Bild V-28

Zur näherungsweise Berechnung des 1. Doppelstreifens bei der Simpsonschen Formel

Der Flächeninhalt A_1 zwischen der Parabel und der x -Achse im Teilintervall $x_0 \leq x \leq x_0 + 2h$ liefert dann einen *Näherungswert* für den tatsächlichen Flächeninhalt des 1. Doppelstreifens. Er lässt sich mittels *elementarer* Integration wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{x_0}^{x_0+2h} (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx = \left[\frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x \right]_{x_0}^{x_0+2h} = \\
 &= \frac{1}{3} a_2 (x_0 + 2h)^3 + \frac{1}{2} a_1 (x_0 + 2h)^2 + a_0 (x_0 + 2h) - \\
 &\quad - \frac{1}{3} a_2 x_0^3 - \frac{1}{2} a_1 x_0^2 - a_0 x_0
 \end{aligned} \tag{V-86}$$

Wir entwickeln noch die Binome mit Hilfe der bekannten binomischen Formel aus Kap. I (Abschnitt 6), ordnen die Glieder und fassen zusammen:

$$A_1 = (6a_2 x_0^2 + 12a_2 x_0 h + 8a_2 h^2 + 6a_1 x_0 + 6a_1 h + 6a_0) \frac{h}{3} \tag{V-87}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist dabei nichts anderes als die Summe

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \tag{V-88}$$

gebildet aus den Ordinaten der drei Punkte P_0, P_1 und P_2 und jeweils berechnet mit Hilfe der Parabelgleichung (V-85):

$$y_0 = f(x_0) = a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$$

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h) = a_2 (x_0 + h)^2 + a_1 (x_0 + h) + a_0 \quad (\text{V-89})$$

$$y_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h) = a_2 (x_0 + 2h)^2 + a_1 (x_0 + 2h) + a_0$$

(bitte nachrechnen!). Denn an den Stützstellen x_0 , $x_1 = x_0 + h$ und $x_2 = x_0 + 2h$ stimmen die Funktionswerte von *Kurve* und *Parabel* überein. Der 1. *Doppelstreifen* besitzt daher *näherungsweise* den Flächeninhalt

$$A_1 = \left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right) \frac{h}{3} \quad (\text{V-90})$$

Analog erhält man für die übrigen $n - 1$ Doppelstreifen *näherungsweise* folgende Flächeninhalte:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(y_2 + 4y_3 + y_4 \right) \frac{h}{3}, \quad A_3 = \left(y_4 + 4y_5 + y_6 \right) \frac{h}{3}, \quad \dots, \\ \dots, \quad A_n &= \left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n} \right) \frac{h}{3} \end{aligned} \quad (\text{V-91})$$

Durch Summation über *sämtliche* Doppelstreifen erhält man schließlich den folgenden *Näherungswert* für den gesuchten Flächeninhalt¹¹⁾:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx A_1 + A_2 + \dots + A_n = \\ &= \left[(y_0 + 4y_1 + \underbrace{y_2}_{2y_2}) + (y_2 + 4y_3 + \underbrace{y_4}_{2y_4}) + \dots + (\underbrace{y_{2n-2}}_{2y_{2n-2}} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \right] \frac{h}{3} = \\ &= \left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n} \right] \frac{h}{3} = \\ &= \left[\underbrace{(y_0 + y_{2n})}_{\Sigma_0} + 4 \underbrace{(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})}_{\Sigma_1} + 2 \underbrace{(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})}_{\Sigma_2} \right] \frac{h}{3} = \\ &= \left(\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2 \right) \frac{h}{3} \end{aligned} \quad (\text{V-92})$$

¹¹⁾ Wir gehen ähnlich vor wie bei der Herleitung der Trapezformel. Den allen Summanden gemeinsamen Faktor $h/3$ haben wir bereits ausgeklammert. Dann berücksichtigen wir, dass die beiden Randordinaten einfach, die inneren Stützwerte abwechselnd mit dem Faktor 4 bzw. 2 auftreten.

Diese als *Simpsonsche Formel* bezeichnete Näherung für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ lässt sich dann auch wie folgt darstellen:

Simpsonsche Formel (Bild V-27)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \left[\underbrace{(y_0 + y_{2n})}_{\Sigma_0} + 4 \underbrace{(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})}_{\Sigma_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \underbrace{(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})}_{\Sigma_2} \right] \frac{h}{3} = \\ &= \left(\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2 \right) \frac{h}{3} \end{aligned} \quad (\text{V-93})$$

Dabei bedeuten:

y_k : Stützwerte der Funktion $y = f(x)$, berechnet an den $2n + 1$ Stützstellen
 $x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, 1, \dots, 2n)$

h : Breite eines *einfachen* Streifens (Schrittweite) $\left(h = \frac{b-a}{2n} \right)$

Σ_0 : Summe der beiden *äußeren* Stützwerte (Ordinaten der beiden *Randpunkte*)

Σ_1 : Summe der *inneren* Stützwerte mit einem *ungeraden* Index

Σ_2 : Summe der *inneren* Stützwerte mit einem *geraden* Index

Anmerkungen

- (1) Auch diese Formel gilt *unabhängig* von der *geometrischen* Interpretation für jede *stetige* Integrandfunktion $f(x)$.
- (2) Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ streben die Näherungswerte gegen den *exakten* Integralwert.
- (3) *Nachteil* der Simpsonschen Formel: Sie ist nur anwendbar für eine Zerlegung in eine *gerade* Anzahl von (einfachen) Streifen, d. h. man benötigt stets eine *ungerade* Anzahl von Stützwerten.
- (4) Beachten Sie die unterschiedlichen Gewichtungsfaktoren der Stützwerte (symmetrische Verteilung: 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 2, 4, 1).

- (5) Einen *verbesserten* Näherungswert I_v erhält man folgendermaßen: Ist I_h der Näherungswert bei der Schrittweite h und I_{2h} der Näherungswert bei der *doppelten* Schrittweite $2h$, so ist der Fehler ΔI von I_h *näherungsweise* durch

$$\Delta I = \frac{1}{15} (I_h - I_{2h}) \quad (\text{V-94})$$

gegeben. Einen gegenüber der Schrittweite h *verbesserten* Wert I_v erzielt man dann nach der Formel

$$I_v = I_h + \Delta I \quad (\text{V-95})$$

(Voraussetzung: $2n$ ist durch 4 teilbar).

■ Beispiel

Wir wollen den Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x) = \sqrt{1 + e^{0,5x^2}}$ im Intervall $1 \leq x \leq 2,6$ *näherungsweise* mit Hilfe der *Simpsonschen Formel* für eine Zerlegung in $2n = 8$ *einfache* Streifen und damit $n = 4$ *Doppelstreifen* berechnen (siehe Bild V-29).

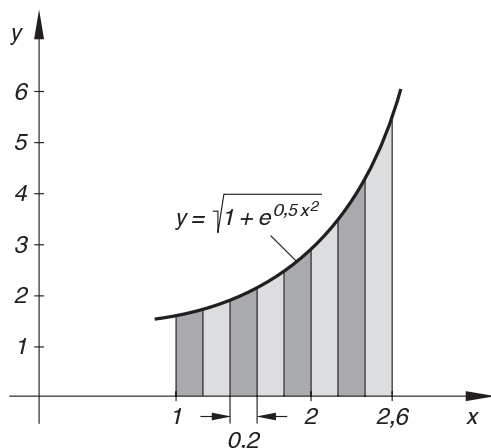


Bild V-29

Zur Berechnung des Flächeninhaltes
unter der Kurve $y = \sqrt{1 + e^{0,5x^2}}$
im Intervall $1 \leq x \leq 2,6$

Um den dabei begangenen *Fehler* abschätzen zu können und um gleichzeitig einen *verbesserten* Näherungswert zu erhalten, wird eine sog. *Zweitrechnung* mit *halber* Streifenanzahl (also *vier* einfachen und damit *zwei* Doppelstreifen) durchgeführt. Der Mehraufwand an Rechenarbeit ist dabei relativ *gering*, da die bei der *Zweitrechnung* benötigten Stützpunkte bereits aus der *Erstrechnung* bekannt sind. Die Schrittweiten betragen somit:

Erstrechnung: ($2n = 8$, d. h. $n = 4$): $h = 0,2$

Zweitrechnung: ($2n^* = 4$, d. h. $n^* = 2$): $h^* = 2h = 0,4$

Erstrechnung (Schrittweite: $h = 0,2$)		Zweitrechnung (Schrittweite: $h^* = 2h = 0,4$)	
k	Stützstellen x_k	Stützweite $y_k = \sqrt{1 + e^{0,5x_k^2}}$	
0	1	1,6275	1,6275
1	1,2	1,7477	
2	1,4		1,9143
3	1,6	2,1440	
4	1,8		2,4603
5	2	2,8964	
6	2,2		3,4994
7	2,4	4,3375	
8	2,6	5,5110	5,5110
		$\Sigma_0 = 7,1385$ $\Sigma_1 = 11,1256$ $\Sigma_2 = 7,8740$	$\Sigma_0^* = 7,1385$ $\Sigma_1^* = 5,4137$ $\Sigma_2^* = 2,4603$

Hinweis zur Tabelle: Die grau unterlegten Stützstellen und Stützweite der Erstrechnung entfallen bei der Zweitrechnung.

Erstrechnung: $2n = 8, \quad n = 4, \quad h = 0,2$

$$\begin{aligned} I_h &= \int_1^{2,6} \sqrt{1 + e^{0,5x^2}} dx = \left(\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2 \right) \frac{h}{3} = \\ &= \left(7,1385 + 4 \cdot 11,1256 + 2 \cdot 7,8740 \right) \cdot \frac{0,2}{3} = 4,4926 \end{aligned}$$

Zweitrechnung: $2n^* = 4, \quad n^* = 2, \quad h^* = 2h = 0,4$

$$\begin{aligned} I_{2h} &= I_h^* = \left(\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^* \right) \frac{h^*}{3} = \left(\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^* \right) \frac{2h}{3} = \\ &= \left(7,1385 + 4 \cdot 5,4137 + 2 \cdot 2,4603 \right) \cdot \frac{0,4}{3} = 4,4952 \end{aligned}$$

Der Fehler für die Erstrechnung beträgt damit rund

$$\Delta I = \frac{1}{15} \left(I_h - I_{2h} \right) = \frac{1}{15} \left(4,4926 - 4,4952 \right) = -0,0002$$

Einen *verbesserten* Wert liefert die Formel (V-95):

$$I_v = I_h + \Delta I = 4,4926 - 0,0002 = 4,4924 \quad \blacksquare$$

9 Uneigentliche Integrale

Bei den bisher behandelten bestimmten Integralen haben wir stets die folgenden Eigenschaften vorausgesetzt:

1. Der Integrand $f(x)$ ist eine *stetige* Funktion;
2. Die Integrationsgrenzen a und b und damit auch das Integrationsintervall sind *endlich*.

Solche Integrale werden auch als „*eigentliche*“ Integrale bezeichnet. In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen treten aber auch Integrale auf, bei denen mindestens eine der beiden genannten Eigenschaften *nicht* vorhanden ist. Integrale dieser Art, mit denen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen, werden als „*uneigentliche*“ Integrale bezeichnet.

9.1 Unendliches Integrationsintervall

In den Anwendungen treten vereinzelt Integrale mit einem *unendlichen* Integrationsintervall auf. Sie sind zunächst *nicht* definiert (vgl. hierzu die Integraldefinition (V-22)). *Formal* lassen sie sich auf einen der folgenden Integraltypen zurückführen:

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

Wir geben zunächst zwei anschauliche Anwendungsbeispiele.

■ Beispiele

- (1) Im *Gravitationsfeld der Erde* soll eine Masse m aus der Entfernung r_0 (vom Erdmittelpunkt aus gemessen) ins *Unendliche* ($r = \infty$) gebracht werden (Bild V-30; siehe hierzu auch Beispiel (3) im späteren Abschnitt 10.6).

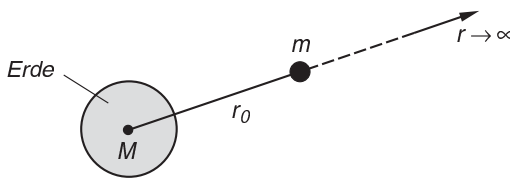


Bild V-30

Arbeit im Gravitationsfeld der Erde

Die Berechnung der dabei aufzuwendenden *Arbeit* W führt zu dem folgenden *uneigentlichen Integral*:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} f \frac{mM}{r^2} dr = f m M \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

(f : Gravitationskonstante; M : Erdmasse).

- (2) Bei der Bestimmung des *Flächeninhaltes* A zwischen der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ und der x -Achse stößt man auf das folgende *uneigentliche Integral* (siehe Bild V-31):

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

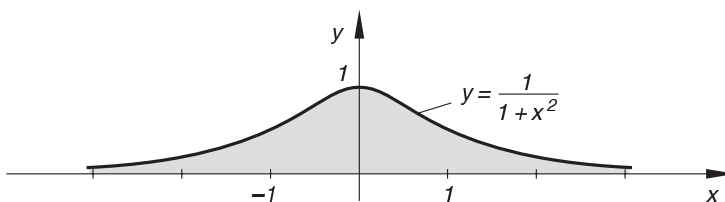


Bild V-31 Zur Berechnung der Fläche unterhalb der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$

■

Um einem *uneigentlichen* Integral einen Wert zuweisen zu können, muss der in Abschnitt 2 erklärte Integralbegriff *erweitert* werden. Wir beschränken uns dabei auf Integrale vom Typ $\int_a^\infty f(x) dx$, wobei wie bisher die *Stetigkeit* des Integranden $f(x)$ im Integrationsintervall $x \geq a$ vorausgesetzt wird. Im Einzelnen wird dabei wie folgt verfahren:

Berechnung eines uneigentlichen Integrals vom Typ $\int_a^\infty f(x) dx$

1. Zunächst wird über das *endliche* Intervall $a \leq x \leq \lambda$ integriert ($\lambda > a$). Das Integral ist *vorhanden*, sein Wert hängt aber noch von der gewählten oberen Grenze λ ab:

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x) dx \quad (\text{V-96})$$

2. Dann wird der *Grenzwert* von $I(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ berechnet. Ist er vorhanden, so setzt man definitionsgemäß

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx \quad (\text{V-97})$$

und nennt das uneigentliche Integral *konvergent*. Andernfalls spricht man von einem *divergenten* uneigentlichen Integral.

Anmerkung

Analog werden die *uneigentlichen Integrale* $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ durch Grenzwerte erklärt. Bei letzterem Integral wird das unendliche Integrationsintervall durch einen *beliebigen* Teilpunkt $x = c$ zunächst in zwei Teilintervalle zerlegt und dann die beiden uneigentlichen Integrale (wie oben geschildert) berechnet. Wenn *beide* Integrale (Grenzwerte) existieren, gilt dies auch für das Ausgangsintegral.

■ Beispiele

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

Wir integrieren zunächst von $x = 1$ bis zur Stelle $x = \lambda > 1$ und erhalten nach der *Potenzregel* der Integralrechnung:

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^3} dx = \int_1^{\lambda} x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{\lambda} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

Im zweiten Schritt vollziehen wir den *Grenzübergang* für $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Das *uneigentliche* Integral ist daher *konvergent* und besitzt den Wert $1/2$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \frac{1}{2}$$

- (2) Wir berechnen das zu Beginn erwähnte *Arbeitsintegral* (Arbeit an einer Masse im Gravitationsfeld der Erde)

$$W = \int_{r_0}^{\infty} f \frac{mM}{r^2} dr = f mM \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

und erhalten zunächst mit der (endlichen) *oberen* Grenze $r = \lambda$:

$$W(\lambda) = f mM \cdot \int_{r_0}^{\lambda} \frac{1}{r^2} dr = f mM \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\lambda} = f mM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

Der *Grenzwert* für $\lambda \rightarrow \infty$ ist *vorhanden* und führt zu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} W(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f mM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = f mM \left(\frac{1}{r_0} - 0 \right) = \frac{f mM}{r_0}$$

Die aufzuwendende *Arbeit gegen die Gravitationskraft* beträgt daher:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} f \frac{mM}{r^2} dr = f mM \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} W(\lambda) = \frac{f mM}{r_0}$$

- (3) Das *uneigentliche* Integral $\int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx$ ist dagegen *divergent*, wie wir gleich zeigen werden. Zunächst aber integrieren wir von $x = 0$ bis hin zu $x = \lambda > 0$ (grau unterlegte Fläche in Bild V-32):

$$I(\lambda) = \int_0^{\lambda} \sqrt{x} \, dx = \int_0^{\lambda} x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} \left[x^{3/2} \right]_0^{\lambda} = \frac{2}{3} (\lambda^{3/2} - 0) = \frac{2}{3} \sqrt{\lambda^3}$$

Beim *Grenzübergang* $\lambda \rightarrow \infty$ strebt der Integralwert $I(\lambda)$ jedoch *über alle Grenzen*:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt{\lambda^3} = \infty$$

Geometrische Interpretation: Die von der Kurve $y = \sqrt{x}$ und der positiven x -Achse eingeschlossene Fläche ist *unendlich* groß (siehe Bild V.32):

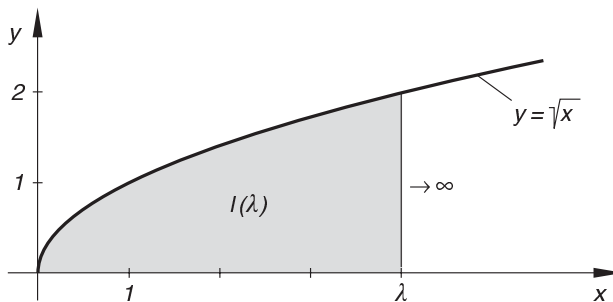


Bild V-32

- (4) Für die *Fläche* A zwischen der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ und der x -Achse (siehe hierzu auch Bild V-31) erhalten wir den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^{\lambda} = 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\arctan \lambda - \underbrace{\arctan 0}_0) = \\ &= 2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\arctan \lambda) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Bei der Flächenberechnung haben wir dabei die *Achsensymmetrie* von Kurve und Fläche berücksichtigt (Faktor 2). ■

9.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)

Der Integrand $f(x)$ soll an der oberen Integrationsgrenze $x = b$ eine *Unendlichkeitsstelle* (Polstelle) besitzen (Bild V-33). Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist daher wegen des *unbeschränkten* Integranden zunächst *nicht definiert*.

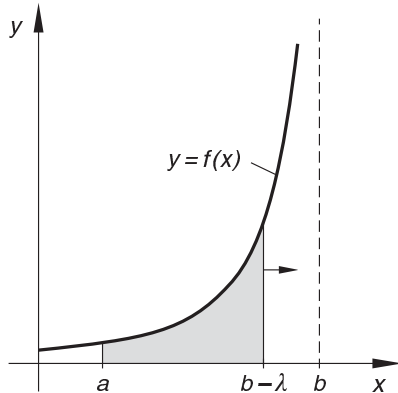


Bild V-33

Integrand $f(x)$ mit einer Polstelle an der oberen Grenze b

Man geht dann in diesem Sonderfall wie folgt vor:

Uneigentliches Integral mit einer Unendlichkeitsstelle im Integranden

Der Integrand $f(x)$ des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x) dx$ hat an der oberen Grenze $x = b$ eine *Unendlichkeitsstelle* (Pol). Wir gehen dann wie folgt vor:

1. Zunächst wird von der Stelle $x = a$ bis zur Stelle $x = b - \lambda$ integriert (mit $\lambda > 0$; siehe Bild V-33). Das bestimmte Integral ist *vorhanden*, der Integralwert hängt aber noch vom *Parameter* λ ab:

$$I(\lambda) = \int_a^{b-\lambda} f(x) dx \quad (\text{V-98})$$

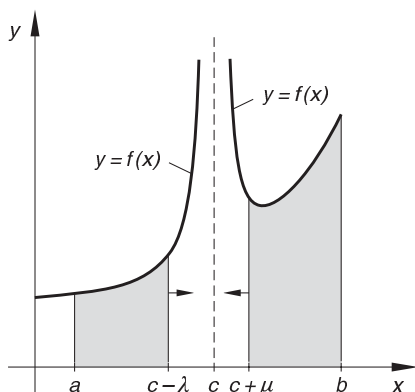
2. Ist der Grenzwert dieses Integrals für $\lambda \rightarrow 0$ *vorhanden*, so setzt man definitionsgemäß

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x) dx \quad (\text{V-99})$$

und nennt das uneigentliche Integral *konvergent*. Anderenfalls spricht man von einem *divergenten* uneigentlichen Integral.

Anmerkungen

- (1) Analog verfährt man, wenn die Polstelle an der *unteren* Grenze $x = a$ liegt. Man integriert dann zunächst von $x = a + \lambda$ (mit $\lambda > 0$) bis hin zu $x = b$ und bestimmt dann den *Grenzwert* für $\lambda \rightarrow 0$.
- (2) Liegt der Pol im *Innern* des Integrationsbereiches an der Stelle $x = c$, so muss das Integral zunächst in *zwei* Teilintegrale aufgespalten werden. Man integriert von $x = a$ bis hin zu $x = c - \lambda$ und dann weiter von der Stelle $x = c + \mu$ bis hin zu $x = b$ ($\lambda > 0, \mu > 0$; Bild V-34). Dann werden die *Grenzwerte* für $\lambda \rightarrow 0$ bzw. $\mu \rightarrow 0$ bestimmt. Das uneigentliche Integral *konvergiert* nur, wenn *beide* Grenzwerte vorhanden sind (Integralwert = *Summe* der beiden Grenzwerte).

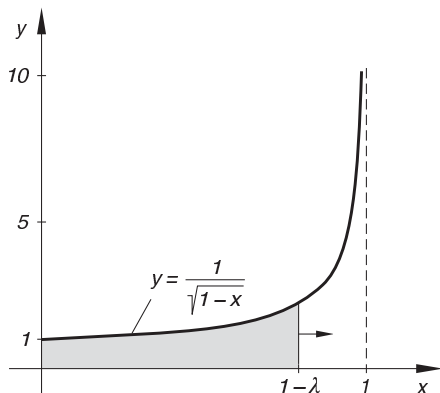
**Bild V-34**

Integrand $f(x)$ mit einer Polstelle bei c im Innern des Integrationsintervalls

■ Beispiele

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = ?$$

Der Integrand hat an der *oberen* Integrationsgrenze $x = 1$ eine *Unendlichkeitsstelle* (Bild V-35).

**Bild V-35**

Zunächst integrieren wir daher von $x = 0$ bis $x = 1 - \lambda$ mit $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_0^{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2 \left[\sqrt{1-x} \right]_0^{1-\lambda} = \\ &= -2(\sqrt{\lambda} - \sqrt{1}) = -2(\sqrt{\lambda} - 1) = 2(1 - \sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

Das Integral haben wir dabei durch die *lineare Substitution* $u = 1 - x$ gelöst (bitte nachrechnen). Jetzt führen wir den *Grenzübergang* $\lambda \rightarrow 0$ durch und erhalten:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\lambda}) = 2(1 - \sqrt{0}) = 2(1 - 0) = 2$$

Das uneigentliche Integral ist also *konvergent* und es gilt definitionsgemäß:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = 2$$

- (2) Die Berechnung des *Flächeninhaltes* unter der Kurve $y = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $0 \leq x \leq 4$ führt auf das *uneigentliche Integral*

$$A = \int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

da die Funktionsgleichung an der Stelle $x = 0$ *nicht definiert* ist (Bild V-36).

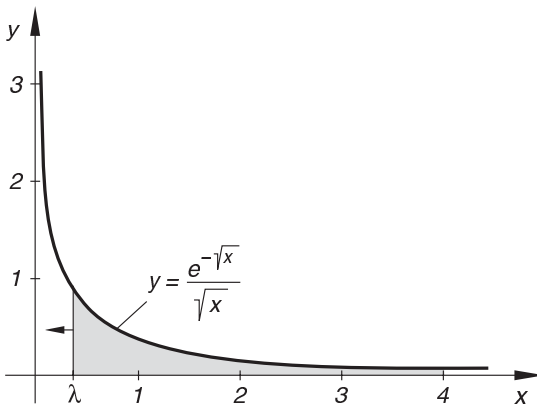


Bild V-36

Wir integrieren daher zunächst von der Stelle $x = \lambda > 0$ bis hin zur Stelle $x = 4$. Das anfallende Integral

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

lösen wir dabei wie folgt durch *Substitution* (die Integrationsgrenzen werden mit-substituiert):

$$u = \sqrt{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$$

$$\text{Untere Grenze: } x = \lambda \Rightarrow u = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{Obere Grenze: } x = 4 \Rightarrow u = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{\sqrt{\lambda}}^2 \frac{e^{-u}}{u} \cdot 2u du = 2 \cdot \int_{\sqrt{\lambda}}^2 e^{-u} du = 2 \left[-e^{-u} \right]_{\sqrt{\lambda}}^2 = \\ &= 2 \left(-e^{-2} + e^{-\sqrt{\lambda}} \right) = 2 \left(e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{-2} \right) \end{aligned}$$

Der Grenzwert für $\lambda \rightarrow 0$ führt zu dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 2(e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{-2}) = 2(e^{-\sqrt{0}} - e^{-2}) = \\ &= 2(e^0 - e^{-2}) = 2(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Das Flächenstück hat also einen *endlichen* Flächeninhalt (*konvergentes* uneigentliches Integral). ■

10 Anwendungen der Integralrechnung

10.1 Einfache Beispiele aus Physik und Technik

10.1.1 Integration der Bewegungsgleichung

In Kap. IV (Abschnitt 2.14.1) haben wir uns bereits mit der Bewegung eines Massenpunktes beschäftigt und dabei gezeigt, dass man *Geschwindigkeit* v und *Beschleunigung* a durch *ein-* bzw. *zweimaliges Differenzieren* der als bekannt vorausgesetzten *Weg-Zeit-Funktion* $s = s(t)$ erhalten kann:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (\text{V-100})$$

Umgekehrt lassen sich *Weg* s und *Geschwindigkeit* v einer Bewegung durch *Integration der Beschleunigung-Zeit-Funktion* $a = a(t)$ gewinnen. Unterliegt ein Körper der Masse m einer zeitlich veränderlichen Kraft vom Betrage $F = F(t)$, so folgt aus der *Newtonschen Bewegungsgleichung* $F = ma$ für die *Beschleunigung-Zeit-Funktion*

$$a = a(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (\text{V-101})$$

Ist $F(t)$ und damit $a(t)$ bekannt, so erhält man aus dieser Gleichung durch *Integration* die *Geschwindigkeit-Zeit-Funktion*

$$v = v(t) = \int \dot{v} dt = \int a(t) dt \quad (\text{V-102})$$

und hieraus durch *nochmalige Integration* die *Weg-Zeit-Funktion*

$$s = s(t) = \int \dot{s} dt = \int v(t) dt \quad (\text{V-103})$$

Die dabei auftretenden *Integrationskonstanten* werden in der Regel durch die *Anfangswerte* $s(0) = s_0$ und $v(0) = v_0$ festgelegt, wobei s_0 die *Wegmarke zu Beginn* (d. h. zur Zeit $t = 0$) und v_0 die *Anfangsgeschwindigkeit* bedeuten.

Wir fassen dieses Ergebnis wie folgt zusammen:

Integration der Bewegungsgleichung $F = F(t)$ bzw. $a = a(t)$ ($F = ma$)

Geschwindigkeit v und Weg s erhält man durch ein- bzw. zweimalige Integration der Beschleunigung-Zeit-Funktion $a = a(t)$:

$$v = \int a(t) dt, \quad s = \int v(t) dt \quad (\text{V-104})$$

■ Beispiele

(1) Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Eine Bewegung erfolge mit *konstanter* Beschleunigung a längs einer Geraden. Weg und Geschwindigkeit zu Beginn (d. h. zur Zeit $t = 0$) seien $s(0) = s_0$ und $v(0) = v_0$. Dann gilt für die *Geschwindigkeit* v :

$$v = \int a dt = a \cdot \int 1 dt = at + C_1$$

Die Integrationskonstante wird aus dem *Anfangswert* $v(0) = v_0$ berechnet:

$$\begin{aligned} v(0) = v_0 &\Rightarrow a \cdot 0 + C_1 = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 \\ v &= at + v_0 \end{aligned}$$

Durch *nochmalige Integration* erhalten wir das *Weg-Zeit-Gesetz*:

$$s = \int v(t) dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2$$

Aus dem *Anfangswert* $s(0) = s_0$ folgt $C_2 = s_0$, und das *Weg-Zeit-Gesetz* nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0 \quad (\text{für } t \geq 0)$$

(2) **Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes**

Wir untersuchen die *Fallgeschwindigkeit* v als Funktion der Fallzeit t unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Der Schwerkraft (dem Gewicht) mg wirkt dabei die *Reibungskraft* kv^2 entgegen ($k > 0$: Reibungskoeffizient). Nach dem *Grundgesetz der Mechanik* erhält man damit die folgende *Bewegungsgleichung für den freien Fall*:

$$ma = mg - kv^2 \quad \text{oder} \quad a = g - \frac{k}{m} v^2$$

Bevor wir diese Gleichung integrieren, bringen wir sie noch unter Berücksichtigung von $a = \frac{dv}{dt}$ auf die folgende Gestalt:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2 = g \left(1 - \frac{k}{mg} v^2 \right) \Rightarrow \frac{dv}{g \left(1 - \frac{k}{mg} v^2 \right)} = dt$$

Mit Hilfe der *Substitution*

$$x = \sqrt{\frac{k}{mg}} v, \quad \frac{dx}{dv} = \sqrt{\frac{k}{mg}}, \quad dv = \sqrt{\frac{mg}{k}} dx$$

erhalten wir schließlich:

$$\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{dx}{g(1-x^2)} = \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)} = dt$$

Unbestimmte *Integration auf beiden Seiten* führt zu:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \int \frac{dx}{1-x^2} = \int dt \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \operatorname{artanh} x = t + C$$

Nach *Rücksubstitution* ergibt sich hieraus:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v \right) = t + C$$

Der *freie Fall* erfolge aus der *Ruhe* heraus, d. h. zur Zeit $t = 0$ sei $v(0) = 0$. Aus diesem *Anfangswert* erhält man für die Integrationskonstante den Wert $C = 0$ (da $\operatorname{artanh} 0 = 0$ ist). Somit gilt:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v \right) = t \Rightarrow \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v \right) = \sqrt{\frac{gk}{m}} t$$

Durch *Umkehrung* erhalten wir schließlich das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$\sqrt{\frac{k}{mg}} v = \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right) \Rightarrow v = v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right)$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt die Fallgeschwindigkeit gegen die *konstante Endgeschwindigkeit*

$$v_E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right) \right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

(Zur Erinnerung: Für $x \rightarrow \infty$ strebt bekanntlich $\tanh x$ gegen 1).

Gewichtskraft und Reibungskraft sind dann im *Gleichgewicht* und der Körper fällt *kräftefrei*, d. h. mit *konstanter* Geschwindigkeit. Die *Geschwindigkeit-Zeit-Funktion* lässt sich damit auch in der Form

$$v = v(t) = v_E \cdot \tanh \left(\frac{g}{v_E} t \right) \quad (t \geq 0)$$

darstellen. Ihr Verlauf ist in Bild V-37 skizziert.

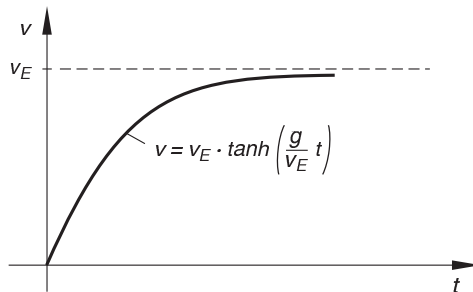


Bild V-37

Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Fallzeit t unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

10.1.2 Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens

Wir beschäftigen uns jetzt mit einem typischen Problem aus der *Festigkeitslehre*: Ein einseitig fest eingespannter homogener Balken der Länge l mit konstanter Querschnittsfläche werde durch eine am freien Balkenende einwirkende Kraft vom Betrage F auf *Biegung* beansprucht (Bild V-38).

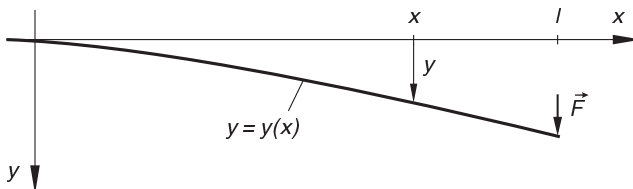


Bild V-38 Biegelinie $y = y(x)$ eines einseitig eingespannten Balkens unter dem Einfluss einer konstanten Kraft vom Betrage F am freien Ende

Die Durchbiegung y ist dabei von Ort zu Ort verschieden, d. h. eine Funktion $y = y(x)$ der Ortskoordinate x (wir messen x vom eingespannten Balkenende aus). In der Festigkeitslehre wird gezeigt, dass die 2. Ableitung der elastischen Linie der *Biegegleichung*¹²⁾

$$y'' = -\frac{M_b}{EI} \quad (\text{V-105})$$

genügt. In dieser Gleichung bedeuten:

E : Elastizitätsmodul (Materialkonstante)

I : Flächenmoment des Balkenquerschnitts

M_b : Biegemoment (von Ort zu Ort verschieden)

In unserem Beispiel ist das Produkt EI (*Biegesteifigkeit* genannt) eine Konstante. Für das Biegemoment an der Stelle x gilt dabei:

$$M_b = -F(l - x) \quad (\text{V-106})$$

(die konstante Kraft wirkt im Abstand $l - x$ von der betrachteten Stelle). Damit nimmt die *Biegegleichung* die folgende Gestalt an:

$$y'' = \frac{F}{EI}(l - x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (\text{V-107})$$

Die Gleichung der gesuchten *Biegelinie* $y = y(x)$ erhält man nach *zweimaliger Integration der Biegegleichung* (V-107):

$$y' = \int y'' dx = \frac{F}{EI} \cdot \int (l - x) dx = \frac{F}{EI} \left(lx - \frac{1}{2} x^2 + C_1 \right) \quad (\text{V-108})$$

$$\begin{aligned} y &= \int y' dx = \frac{F}{EI} \cdot \int \left(lx - \frac{1}{2} x^2 + C_1 \right) dx = \\ &= \frac{F}{EI} \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{V-109})$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Randwerten*

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & (\text{keine Durchbiegung am eingespannten Ende } x = 0) \\ y'(0) &= 0 & (\text{waagerechte Tangente am eingespannten Ende } x = 0) \end{aligned} \quad (\text{V-110})$$

wie folgt:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{F}{EI}(0 - 0 + C_1) = \frac{F}{EI} \cdot C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{F}{EI}(0 - 0 + 0 + C_2) = \frac{F}{EI} \cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

¹²⁾ Die Biegegleichung ist eine sog. *Differentialgleichung 2. Ordnung* (siehe hierzu Kap. IV in Band 2). Sie gilt nur *näherungsweise* unter der Voraussetzung, dass die Durchbiegungen *klein* sind gegen die Balkenlänge, d. h. $y \ll l$ ist.

Die *Biegelinie* lautet damit (Polynomfunktion 3. Grades):

$$y = \frac{F}{EI} \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) = \frac{F}{6EI} (3lx^2 - x^3) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (\text{V-111})$$

Die Durchbiegung ist am *freien* Ende ($x = l$) am *größten*. Sie beträgt dort

$$y_{\max} = y(x = l) = \frac{F}{6EI} (3l^3 - l^3) = \frac{F}{6EI} \cdot 2l^3 = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (\text{V-112})$$

Es handelt sich dabei um ein *Randmaximum* (siehe hierzu auch das Beispiel (3) aus Kap. IV, Abschnitt 3.5).

10.1.3 Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes

Wir betrachten das *elektrostatische Feld* in der Umgebung einer *positiven Punktladung* Q . Es besitzt die in Bild V-39 skizzierte *radiale* Struktur.

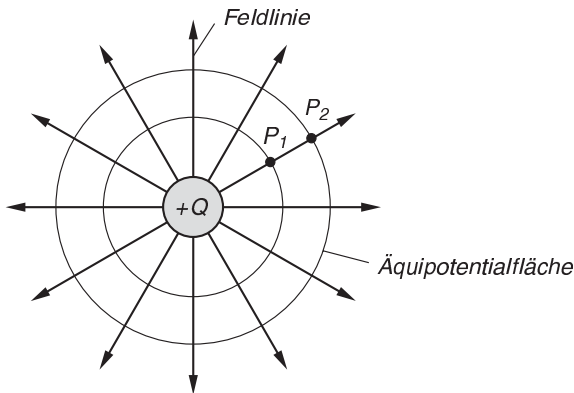


Bild V-39

Elektrostatisches Feld
in der Umgebung einer
positiven Punktladung Q
(ebener Schnitt durch Q)

Die *elektrische Feldstärke* vom Betrage E hängt dabei aus *Symmetriegründen* nur vom *Abstand* r von der Punktladung Q ab. In unserem Beispiel ist

$$E = E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \quad (r > 0) \quad (\text{V-113})$$

(ϵ_0 : Elektrische Feldkonstante; ϵ_r : *Relative* Dielektrizitätskonstante des Mediums).

Auch das *Potential* eines Punktes des elektrischen Feldes ist *kugelsymmetrisch*: Die *Äquipotentialflächen* sind *konzentrische Kugelschalen* (Mittelpunkt: Ladung Q). Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 des Feldes mit den Abständen r_1 bzw. r_2 von der felderzeugenden Ladung Q besteht dann definitionsgemäß die folgende *Potentialdifferenz* (*Spannung*):

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr \quad (\text{V-114})$$

Für die *Feldstärke* setzen wir den Ausdruck (V-113) ein und erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \\
 &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (V-115)
 \end{aligned}$$

10.2 Flächeninhalt

10.2.1 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt (Ergänzungen)

Im Abschnitt 2 wurde das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ als Flächeninhalt A zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den Parallelen $x = a$ und $x = b$ eingeführt (Bild V-40). Diese *geometrische* Interpretation ist jedoch nur zulässig, wenn die (stetige) Integrandfunktion $f(x)$ *überall* im Integrationsbereich die Bedingung $f(x) \geq 0$ erfüllt, die Kurve also *oberhalb* der x -Achse verläuft und ferner $a < b$ ist.

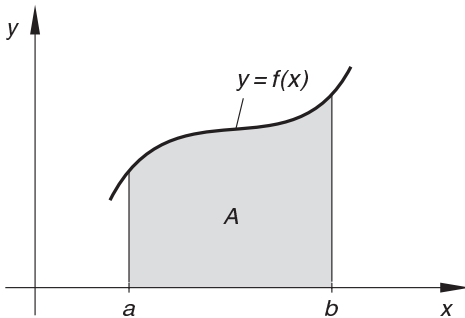


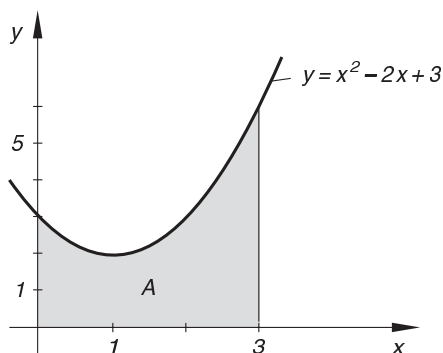
Bild V-40

Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

■ Beispiel

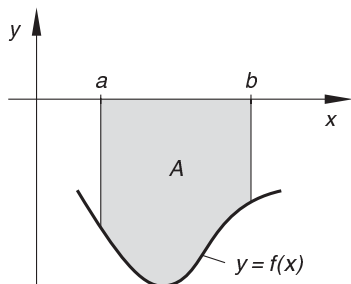
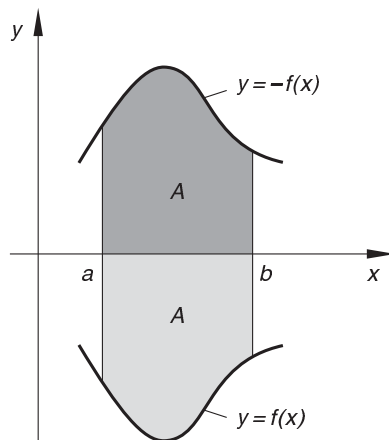
Wir suchen den *Flächeninhalt* A , der von der Parabel $y = x^2 - 2x + 3$, der x -Achse und den Parallelen $x = 0$ und $x = 3$ begrenzt wird (Bild V-41). Da die Parabel im Intervall $0 \leq x \leq 3$ *oberhalb* der x -Achse verläuft, gilt:

$$A = \int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 3x \right]_0^3 = (9 - 9 + 9) - (0) = 9$$

**Bild V-41**

Zur Berechnung der Fläche unter der Parabel
 $y = x^2 - 2x + 3$ im Intervall $0 \leq x \leq 3$

Liegt das Flächenstück jedoch, wie in Bild V-42 skizziert, vollständig *unterhalb* der x -Achse, so ist der Integralwert $\int_a^b f(x) dx$ *negativ* und kann daher *nicht* dem gesuchten Flächeninhalt A entsprechen. In diesem Fall geht man wie folgt vor: Man *spiegelt* die Fläche an der x -Achse und erhält das in Bild V-43 *dunkelgrau* unterlegte Flächenstück vom gleichen Flächeninhalt A .

**Bild V-42****Bild V-43**

Dieses Flächenstück liegt *oberhalb* der x -Achse und wird von der *gespiegelten* Kurve mit der Gleichung $y = -f(x)$ und der x -Achse berandet¹³⁾. Den gesuchten Flächeninhalt A erhalten wir damit durch Integration über die Funktion $y = -f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$:

$$A = \int_a^b [-f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-116})$$

¹³⁾ Bei der Spiegelung einer Kurve an der x -Achse multiplizieren sich die Ordinaten (Funktionswerte) mit -1 .

Die *gespiegelte* Kurve können wir aber auch durch die Gleichung $y = |f(x)|$ beschreiben. Der Flächeninhalt A lässt sich daher auch durch das Integral

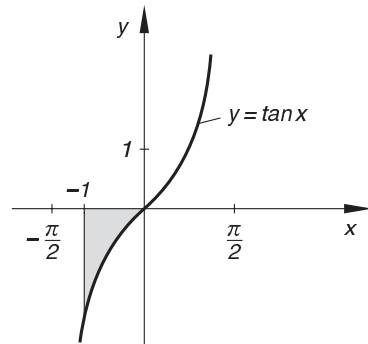
$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (\text{V-117})$$

berechnen, wobei Betragsbildung und Integration miteinander vertauschbar sind.

■ Beispiel

Welchen *Flächeninhalt* A bildet die Tangenskurve $y = \tan x$ im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ mit der x -Achse (Bild V-44)?

Bild V-44



Lösung (unter Verwendung einer Integraltafel):

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-1}^0 \tan x \, dx = - \left[- \ln |\cos x| \right]_{-1}^0 = \left[\ln |\cos x| \right]_{-1}^0 = \\ &= \ln |\cos 0| - \ln |\cos (-1)| = \ln 1 - \ln 0,54 = 0 - (-0,62) = 0,62 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der *allgemeinste* Fall tritt ein, wenn die Fläche *teils oberhalb* und *teils unterhalb* der x -Achse liegt. Wir müssen dann die Fläche so in *Teilflächen* zerlegen, dass diese entweder *vollständig oberhalb* oder *vollständig unterhalb* der x -Achse liegen (Bild V-45). Die entsprechenden Integralbeiträge sind daher *positiv* oder *negativ*, je nachdem, ob die Kurve gerade *oberhalb* oder *unterhalb* der x -Achse verläuft (die *positiven* Beiträge sind in Bild V-45 *dunkelgrau*, die *negativen* Beiträge *hellgrau* unterlegt).

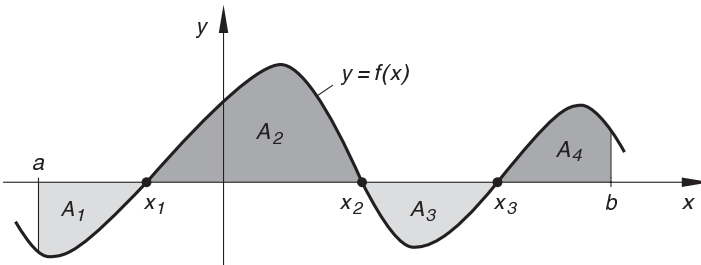


Bild V-45 Zur Berechnung des Flächeninhaltes im allgemeinsten Fall (Zerlegung der Fläche in Teilflächen)

Für die Berechnung dieser Teilflächen benötigen wir daher als zusätzliche Information die im Integrationsintervall $a \leq x \leq b$ gelegenen *Nullstellen* der Funktion $y = f(x)$. So besitzt z. B. die in Bild V-45 skizzierte Funktion genau drei im Integrationsintervall liegende Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 (nach steigender Größe geordnet). In den Teilintervallen $a \leq x \leq x_1$ und $x_2 \leq x \leq x_3$ liegt dabei die Kurve *unterhalb* der x -Achse, die entsprechenden Integralbeiträge I_1 und I_3 sind daher *negativ*. In den Teilintervallen $x_1 \leq x \leq x_2$ und $x_3 \leq x \leq b$ dagegen verläuft die Kurve *oberhalb* der x -Achse, die entsprechenden Integralbeiträge I_2 und I_4 sind somit *positiv*. Die Gesamtfläche A ist dann als *Summe* der *Beträge* aller Teilintegrale darstellbar:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = |I_1| + I_2 + |I_3| + I_4 = \\
 &= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \int_{x_3}^b f(x) dx \quad (\text{V-118})
 \end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse über die Flächenberechnung wie folgt zusammen:

Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x -Achse

Bei der Berechnung des *Flächeninhaltes* A zwischen einer Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ und der x -Achse sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Kurve verläuft *oberhalb* der x -Achse (Bild V-40). Dann gilt:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-119})$$

2. Fall: Die Kurve verläuft *unterhalb* der x -Achse (Bild V-42). Dann gilt:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-120})$$

3. Fall: Die Kurve verläuft *teils oberhalb*, *teils unterhalb* der x -Achse (Bild V-45). In diesem Fall muss die Fläche zunächst so in *Teilflächen* zerlegt werden, dass diese entweder vollständig *oberhalb* oder vollständig *unterhalb* der x -Achse liegen. Dazu werden die *Nullstellen* der Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ benötigt. Anhand einer Skizze lässt sich dann die Zerlegung der Fläche in Teilflächen mit den genannten Eigenschaften problemlos durchführen. Die Berechnung der Teilflächen erfolgt dabei mit Hilfe der Integralformeln (V-119) und (V-120). Die gesuchte Gesamtfläche ist dann die *Summe* aller Teilflächen.

■ Beispiel

Wir berechnen den in Bild V-46 skizzierten Flächeninhalt zwischen der Polynomfunktion $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, der x -Achse und den Parallelen $x = -2,5$ und $x = 3$.

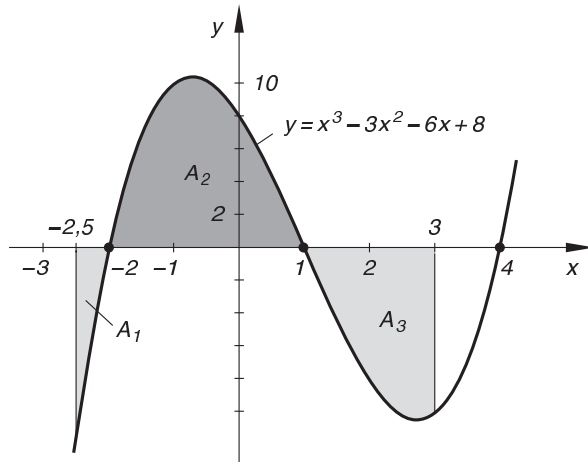


Bild V-46 Zur Berechnung der Fläche zwischen der Kurve $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, der x -Achse und den Parallelen $x = -2,5$ und $x = 3$

Die *Nullstellen* der Funktion sind der Reihe nach $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$ (die Nullstelle bei $x = 1$ findet man leicht durch Probieren, die restlichen mit Hilfe des Horner-Schemas). Sie liegen bis auf den letzten Wert im Intervall $-2,5 \leq x \leq 3$ (Bild V-46). Die Fläche zerfällt damit in *drei Teilflächen*, die jeweils *abwechselnd unter- und oberhalb* der x -Achse liegen. Es sind daher die folgenden drei Teilintegrale zu berechnen ¹⁴⁾:

$$I_1 = \int_{-2,5}^{-2} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x \right]_{-2,5}^{-2} = -2,64$$

$$I_2 = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x \right]_{-2}^1 = 20,25$$

$$I_3 = \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x \right]_1^3 = -14$$

Der gesuchte *Flächeninhalt* beträgt damit:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 = |I_1| + I_2 + |I_3| = |-2,64| + 20,25 + |-14| = \\ &= 2,64 + 20,25 + 14 = 36,89 \end{aligned}$$

¹⁴⁾ Die Integrale unterscheiden sich nur in den Grenzen, Integrand und Stammfunktion sind gleich.

10.2.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Wir betrachten ein Flächenstück, das von den Kurven $y_o = f_o(x)$ und $y_u = f_u(x)$ sowie den beiden Parallelen $x = a$ und $x = b$ berandet wird (Bild V-47). Dabei soll *überall* im Intervall $a \leq x \leq b$ die Bedingung $f_o(x) \geq f_u(x)$ erfüllt sein, d. h. die Kurve $y_o = f_o(x)$ verläuft zwischen $x = a$ und $x = b$ *oberhalb* der Kurve $y_u = f_u(x)$ (dieses Verhalten wird durch die Indizes zum Ausdruck gebracht: *o* = oben, *u* = unten).

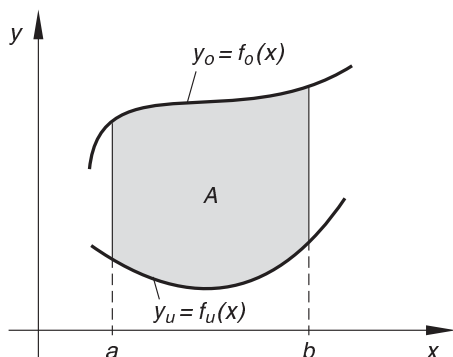


Bild V-47

Zur Berechnung der zwischen zwei Kurven gelegenen Fläche A

Wir berechnen den Flächeninhalt A zwischen den beiden Kurven als *Differenz zweier Flächen*. Nach Bild V-47 gilt nämlich:

$$A = \int_a^b y_o \, dx - \int_a^b y_u \, dx = \int_a^b f_o(x) \, dx - \int_a^b f_u(x) \, dx \quad (\text{V-121})$$

Das *erste* Integral beschreibt dabei die *unterhalb* der Kurve $y_o = f_o(x)$ liegende Fläche, das *zweite* Integral entsprechend den Flächeninhalt *unterhalb* der Kurve $y_u = f_u(x)$. Die Integraldifferenz (V-121) lässt sich noch zu *einem* Integral zusammenfassen:

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven (Bild V-47)

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) \, dx = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] \, dx \quad (\text{V-122})$$

Dabei bedeuten:

$y_o = f_o(x)$: Gleichung der *oberen* Randkurve

$y_u = f_u(x)$: Gleichung der *unteren* Randkurve

Voraussetzung: $f_o(x) \geq f_u(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$

Anmerkungen

- (1) Die Lage des Flächenstücks spielt dabei *keine* Rolle, solange *überall* im Intervall $a \leq x \leq b$ die Bedingung $f_o(x) \geq f_u(x)$ erfüllt ist. Der Formel Ausdruck (V-122) bleibt daher auch für die in den Bildern V-48 a) und V-48 b) skizzierten Flächen *gültig*. Denn in beiden Fällen liegt y_o oberhalb von y_u , in positiver y -Richtung gesehen.

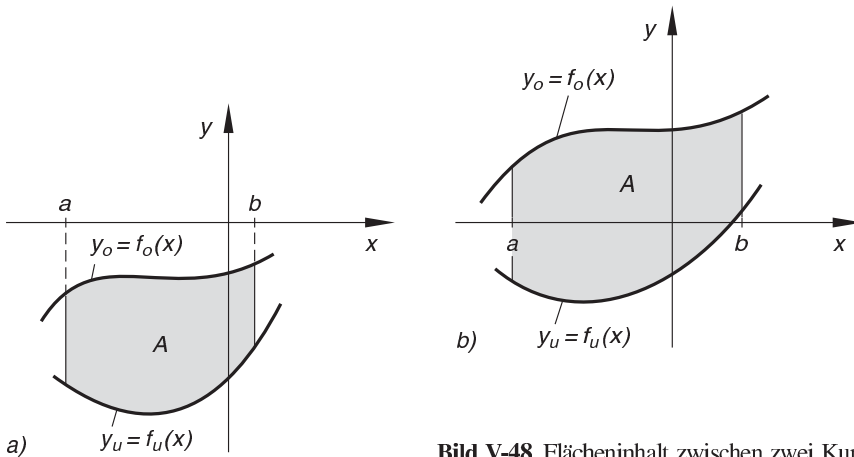


Bild V-48 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

- (2) Die Integralformel (V-122) gilt *nur* unter der Voraussetzung, dass sich die beiden Randkurven der Fläche an *keiner* Stelle des Intervalls $a \leq x \leq b$ durchschneiden, d. h. überall in diesem Intervall muss die Bedingung $f_o(x) \geq f_u(x)$ erfüllt sein. Andernfalls ist die Fläche so in *Teilflächen* zu zerlegen, dass die beiden Randkurven einer *jeden* Teilfläche diese Bedingung erfüllen. Zur Berechnung dieser Teilflächen werden daher die im Intervall $a \leq x \leq b$ gelegenen *Schnittpunkte* beider Kurven benötigt. Bild V-49 verdeutlicht das Vorgehen bei *zwei* Teilflächen A_1 und A_2 , d. h. bei *einem* im Innern des Intervalls $a \leq x \leq b$ gelegenen *Schnittpunkt* S mit dem Abszissenwert x_1 .

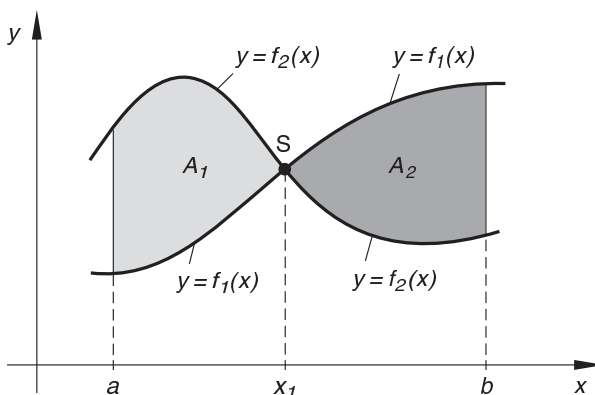


Bild V-49

In den beiden Teilintervallen gelten dann folgende Beziehungen:

$$\text{Im Intervall } a \leq x \leq x_1: f_2(x) \geq f_1(x)$$

$$\text{Im Intervall } x_1 \leq x \leq b: f_1(x) \geq f_2(x)$$

Mit anderen Worten: Im ersten Intervall liegt $f_2(x)$ *oberhalb* von $f_1(x)$, im zweiten Intervall ist es genau *umgekehrt*.

Die *Gesamtfläche* A berechnet sich daher wie folgt:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_a^{x_1} [f_2(x) - f_1(x)] dx + \int_{x_1}^b [f_1(x) - f_2(x)] dx = \\ &= \int_a^{x_1} [f_2(x) - f_1(x)] dx + \left| \int_{x_1}^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \right| \end{aligned} \quad (\text{V-123})$$

■ Beispiele

- (1) Man bestimme den *Flächeninhalt* zwischen der Parabel $y = -0,5x^2 + 6$ und der Geraden $y = 1,5x + 2$ (Bild V-50).

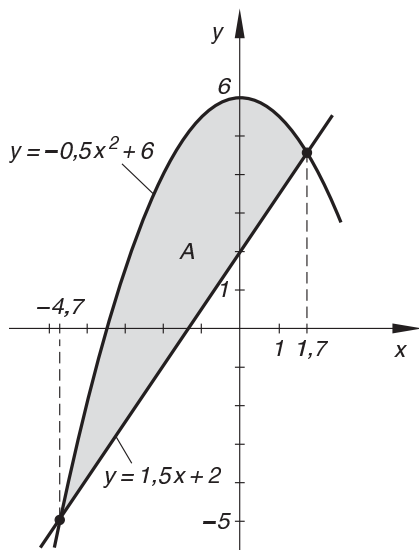


Bild V-50 Zur Berechnung der Fläche zwischen der Parabel $y = -0,5x^2 + 6$ und der Geraden $y = 1,5x + 2$

Lösung: Zunächst berechnen wir die *Kurvenschnittpunkte*:

$$-0,5x^2 + 6 = 1,5x + 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -4,7, \quad x_2 = 1,7$$

Das Flächenstück wird im Intervall $-4,7 \leq x \leq 1,7$ *oben* von der *Parabel* und *unten* von der *Geraden* begrenzt. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4,7}^{1,7} [(-0,5x^2 + 6) - (1,5x + 2)] dx = \\ &= \int_{-4,7}^{1,7} (-0,5x^2 + 6 - 1,5x - 2) dx = \int_{-4,7}^{1,7} (-0,5x^2 - 1,5x + 4) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x \right]_{-4,7}^{1,7} = 3,81 - (-18,06) = 21,87 \end{aligned}$$

- (2) Wir berechnen die zwischen der Sinus- und Kosinuskurve liegende *Fläche* im Bereich zweier *aufeinanderfolgender* Schnittpunkte. Die in Bild V-51 *grau* unterlegten Teile sind wegen der Periodizität der Randkurven *flächengleich*.

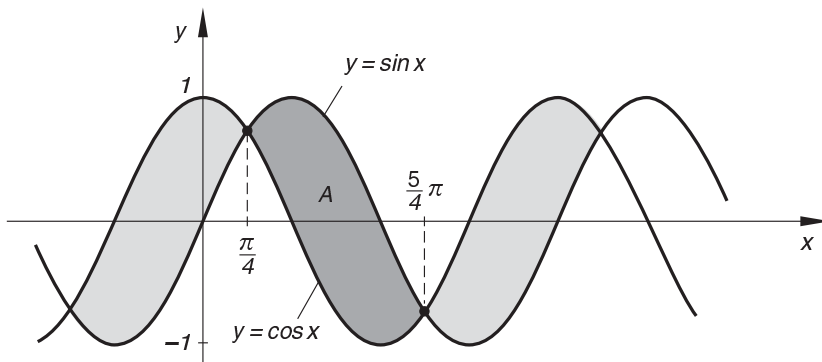


Bild V-51 Flächenstück zwischen der Sinus- und Kosinuskurve im Bereich zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte

Aus der *trigonometrischen* Gleichung

$$\sin x = \cos x \quad \text{oder} \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1$$

berechnen wir zunächst die *Kurvenschnittpunkte*. Sie liegen an den Stellen

$$x_k = \arctan 1 + k \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Wir entscheiden uns dabei für den in Bild V-51 skizzierten *dunkelgrau* unterlegten Bereich zwischen den ersten beiden *positiven* Schnittpunkten, d. h. für das Intervall $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$. In diesem Intervall verläuft die Sinuskurve *oberhalb* der $\backslash$ mittheta Kosinuskurve. Der gesuchte *Flächeninhalt* wird daher über das folgende Integral berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \\ &= \left(-\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) \right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,83 \end{aligned}$$

- (3) Wir interessieren uns für den *Flächeninhalt* A zwischen der Parabel $y = 2,5x^2 - 8,75x$ und der Kurve $y = 2x^3 - 12x^2 + 16x$. Zunächst aber bestimmen wir die dabei benötigten *Kurvenschnittpunkte*:

$$2x^3 - 12x^2 + 16x = 2,5x^2 - 8,75x$$

$$2x^3 - 14,5x^2 + 24,75x = x(2x^2 - 14,5x + 24,75) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2,75, \quad x_3 = 4,5$$

Die gesuchte Fläche A besteht somit aus *zwei* Teilflächen A_1 und A_2 , die wir jetzt berechnen wollen (Bild V-52).

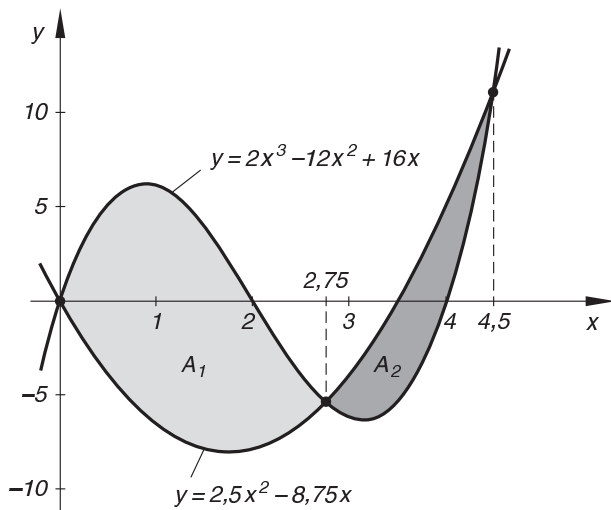


Bild V-52

Im Intervall $0 \leq x \leq 2,75$ ist die Parabel die *untere*, im Intervall $2,75 \leq x \leq 4,5$ dagegen die *obere* Berandung der Fläche. Daher gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{2,75} [(2x^3 - 12x^2 + 16x) - (2,5x^2 - 8,75x)] dx = \\ &= \int_0^{2,75} (2x^3 - 14,5x^2 + 24,75x) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{14,5}{3}x^3 + \frac{24,75}{2}x^2 \right]_0^{2,75} = 21,6634 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{2,75}^{4,5} [(2,5x^2 - 8,75x) - (2x^3 - 12x^2 + 16x)] dx = \\ &= \int_{2,75}^{4,5} (-2x^3 + 14,5x^2 - 24,75x) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{14,5}{3}x^3 - \frac{24,75}{2}x^2 \right]_{2,75}^{4,5} = 6,4759 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine *Gesamtfläche* von

$$A = A_1 + A_2 = 21,6634 + 6,4759 = 28,1393 \approx 28,14$$

- (4) Die in Bild V-53 skizzierte *geschlossene* Kurve wird durch die Gleichung $y^2 = 25x^2 - x^4$ beschrieben. Sie ist sowohl zur x -Achse als auch zur y -Achse *spiegelsymmetrisch*. Bei der Berechnung der eingeschlossenen Fläche können wir uns auf den *1. Quadranten* beschränken.

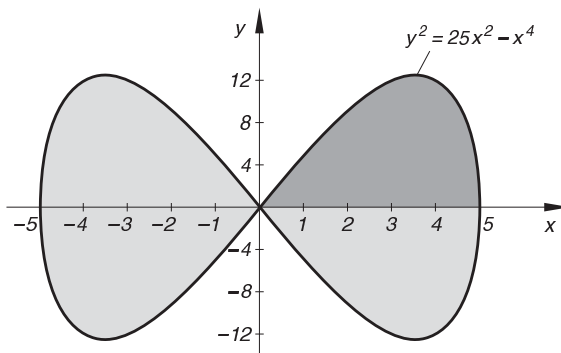


Bild V-53

Die *obere* Randkurve lautet dann:

$$y = \sqrt{25x^2 - x^4} = \sqrt{x^2(25 - x^2)} = x \cdot \sqrt{25 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Das anfallende Integral

$$A = 4 \cdot \int_0^5 x \cdot \sqrt{25 - x^2} \, dx$$

lösen wir durch *Substitution* wie folgt, wobei wir die Integrationsgrenzen mitsubstituieren wollen:

$$u = 25 - x^2, \quad \frac{du}{dx} = -2x, \quad dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = 25 - 0 = 25$$

$$\text{Obere Grenze: } x = 5 \Rightarrow u = 25 - 25 = 0$$

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \int_{u=25}^{u=0} x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{-2x} = -2 \cdot \int_{25}^0 \sqrt{u} \, du = 2 \cdot \int_0^{25} \sqrt{u} \, du = \\ &= 2 \cdot \int_0^{25} u^{1/2} \, du = 2 \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^{25} = \frac{4}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^{25} = \frac{4}{3} \left[u \cdot \sqrt{u} \right]_0^{25} = \\ &= \frac{4}{3} (25 \cdot 5 - 0) = \frac{4}{3} \cdot 125 = \frac{500}{3} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

10.3 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)

Rotationskörper entstehen durch *Drehung* einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse. Zu ihnen gehören beispielsweise die *Kugel*, der *Kreiskegel*, der *Zylinder*, das *Rotationsparaboloid* und der *Torus*.

Rotation einer Kurve um die x -Achse

Die über dem Intervall $a \leq x \leq b$ gelegene Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ erzeuge bei *Rotation um die x -Achse* den in Bild V-54 skizzierten *Rotationskörper*. Dieser wird jetzt durch Schnitte *senkrecht* zur Drehachse in eine große Anzahl n von Scheiben gleicher Dicke Δx zerlegt.

Im Folgenden betrachten wir eine *wahllos* herausgegriffene Scheibe (in Bild V-54 *grau* unterlegt).

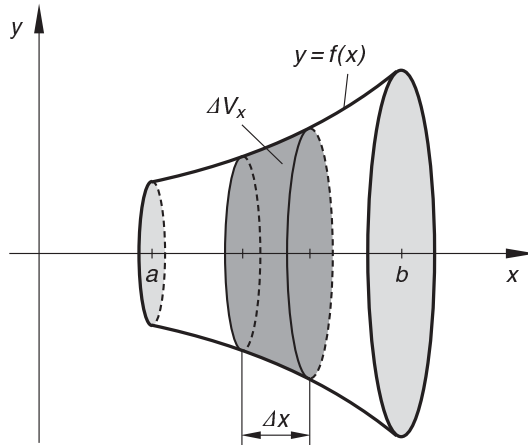


Bild V-54

Zerlegung eines Rotationskörpers
in Zylinderscheiben gleicher
Dicke Δx

Sie wird durch eine *kreisförmige Zylinderscheibe* gleicher Dicke ersetzt, die durch *Rotation* des in Bild V-55 skizzierten *Rechtecks* mit den Seitenlängen $y = f(x)$ und Δx um die *x-Achse* entsteht.

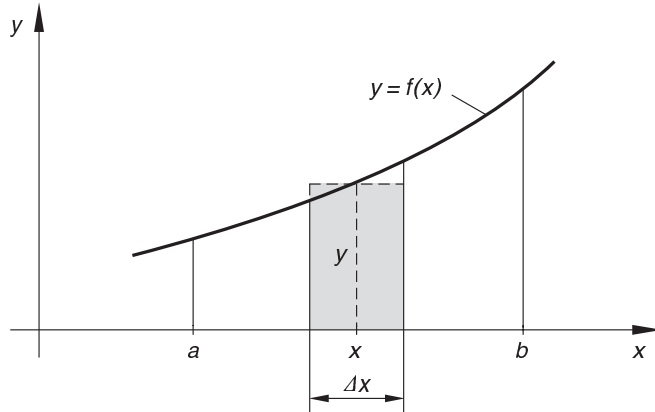


Bild V-55 Durch Rotation des eingezeichneten Rechtecks um die *x-Achse* entsteht eine kreisförmige Zylinderscheibe vom Volumen $\Delta V_x = \pi y^2 \Delta x$

Das Volumen dieser zylindrischen Ersatzscheibe ist dann

$$\Delta V_x = (\text{Grundfläche}) \cdot (\text{Höhe}) = \pi y^2 \Delta x \quad (\text{V-124})$$

(Scheibenradius: y ; Scheibendicke: Δx ; Querschnittsfläche der Scheibe: πy^2).

Ebenso verfährt man mit den übrigen Scheiben. Die *Summation* über *sämtliche* Zylinderscheiben liefert dann einen *Näherungswert* für das Rotationsvolumen V_x , der bei *beliebiger* Verfeinerung der Zerlegung gegen den *exakten* Wert strebt. Beim *Grenzübergang* $n \rightarrow \infty$ geht die Scheibendicke Δx gegen Null und man erhält für V_x die folgende Integralformel:

Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die x -Achse (Bild V-54)

Bei Drehung einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper vom *Volumen*

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (\text{V-125})$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch durch eine in den technischen Anwendungen übliche und sehr beliebte *formale* Betrachtungsweise. Wir gehen dabei von einer *infinitesimal dünnen Scheibe* der Dicke dx aus (in Bild V-56 grau unterlegt):

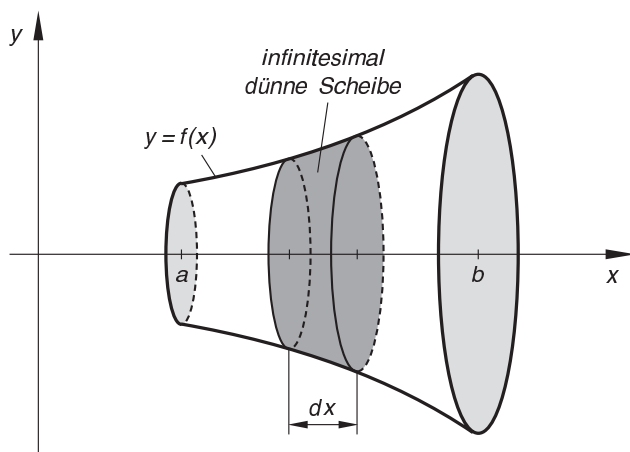


Bild V-56

Der Rotationskörper wird aus infinitesimal dünnen Zylinderscheiben der Dicke dx zusammengesetzt

Das *Volumen* einer solchen nahezu zylindrischen Scheibe (auch *Volumenelement* genannt) beträgt dann

$$dV_x = \pi y^2 dx \quad (\text{V-126})$$

Jetzt *summieren*, d. h. *integrieren* wir über *sämtliche* zwischen $x = a$ und $x = b$ gelegenen *infinitesimal dünnen Scheiben* und erhalten schließlich für das *Rotationsvolumen* die bereits bekannte Formel

$$V_x = \int_{x=a}^{x=b} dV_x = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (\text{V-127})$$

Rotation einer Kurve um die y-Achse

Analog verfährt man bei Körpern, die durch *Rotation* eines Kurvenstücks um die *y*-Achse entstanden sind (Bild V-57).

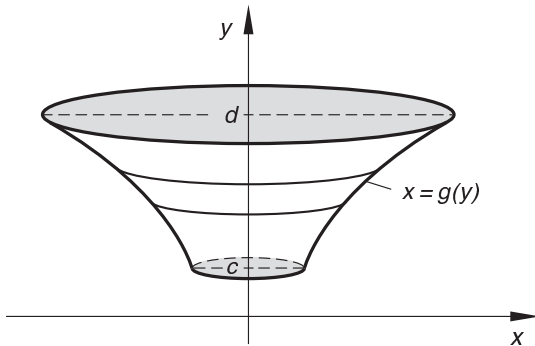


Bild V-57

Zur y-Achse rotationsymmetrischer Körper

Die entsprechende Integralformel für das Rotationsvolumen lautet:

Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die y-Achse (Bild V-57)

Bei Drehung einer Kurve mit der Gleichung $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die *y*-Achse entsteht ein Rotationskörper vom Volumen

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy \quad (\text{V-128})$$

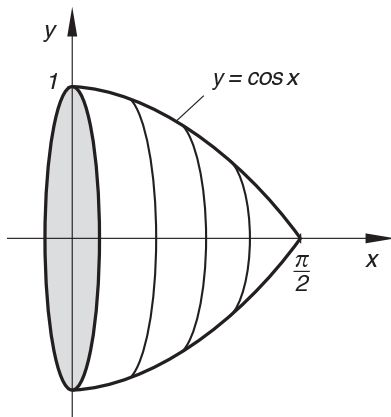
Anmerkung

Die Gleichung der rotierenden Kurve liegt meist in der Form $y = f(x)$ vor und muss dann erst noch nach der Variablen x aufgelöst werden. Die auf diese Weise erhaltene Funktion $x = g(y)$ ist die „nach der Variablen x aufgelöste Form von $y = f(x)$ “.

■ Beispiele

- (1) Durch Drehung der über dem Intervall $0 \leq x \leq \pi/2$ gelegenen *Kosinus*kurve $y = \cos x$ um die *x*-Achse entsteht der in Bild V-58 skizzierte *Rotationskörper*. Sein Volumen beträgt nach Integralformel (V-125):

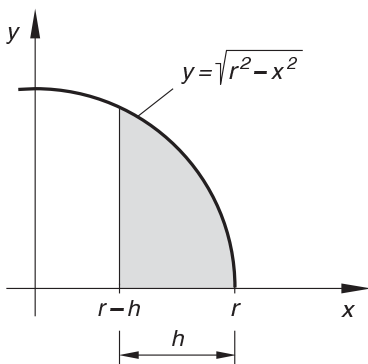
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \pi \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sin \pi}_0 \right) - \left(0 + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sin 0}_0 \right) \right] = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

**Bild V-58**

Rotationskörper, entstanden durch Drehung der Kurve $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ um die x -Achse

- (2) Durch Rotation des in Bild V-59 skizzierten Kreisabschnitts der Höhe h um die x -Achse entsteht ein sog. *Kugelabschnitt* (auch Kugelkappe oder Kalotte genannt) mit dem folgenden Volumen:

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \cdot \int_{r-h}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \cdot \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \\
 &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{r-h}^r = \pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 - r^2 (r-h) + \frac{1}{3} (r-h)^3 \right] = \\
 &= \pi \left[\frac{2}{3} r^3 - r^3 + r^2 h + \frac{1}{3} (r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3) \right] = \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{3} r^3 + r^2 h + \frac{1}{3} r^3 - r^2 h + rh^2 - \frac{1}{3} h^3 \right] = \\
 &= \pi \left(rh^2 - \frac{1}{3} h^3 \right) = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right) = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)
 \end{aligned}$$

**Bild V-59**

Der grau unterlegte Kreisabschnitt erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen Kugelabschnitt

Im Grenzfall $h = 2r$ erhält man eine *Vollkugel* mit dem (bekannten) Volumen

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{\pi}{3} (2r)^2 (3r - 2r) = \frac{\pi}{3} \cdot 4r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- (3) Welchen *Rauminhalt* besitzt der Körper, der durch Drehung der in Bild V-60 skizzierten (grau unterlegten) Fläche um die y -Achse entsteht?

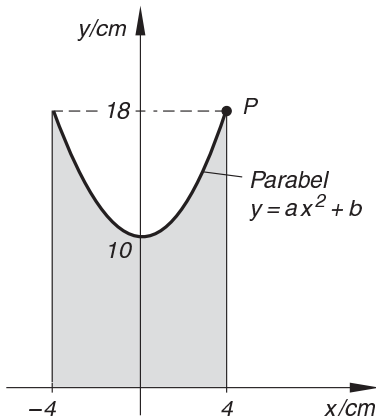


Bild V-60

Lösung: Zunächst bestimmen wir die *Gleichung* der Parabel, die wir wegen der Achsensymmetrie in der Form $y = ax^2 + b$ ansetzen dürfen:

$$\begin{aligned} b &= 10 \text{ cm}; \quad P = (4 \text{ cm}; 18 \text{ cm}) \text{ ist ein Punkt der Parabel} \Rightarrow \\ 18 \text{ cm} &= a \cdot (4 \text{ cm})^2 + 10 \text{ cm} \Rightarrow a = 0,5 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

Die *Parabelgleichung* lautet somit:

$$y = 0,5 \text{ cm}^{-1} \cdot x^2 + 10 \text{ cm}$$

Das gesuchte *Rotationsvolumen* V berechnen wir nach der aus Bild V-60 ersichtlichen Formel

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Paraboloid}}$$

Dabei ist V_{Zylinder} das Volumen des *Zylinders* mit dem Radius $r = 4 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 18 \text{ cm}$:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h = \pi (4 \text{ cm})^2 \cdot 18 \text{ cm} = 904,78 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{Paraboloid}}$ ist das Volumen des *Rotationsparaboloids*, das durch Drehung der über dem Intervall $10 \leq y/\text{cm} \leq 18$ gelegenen Parabel um die y -Achse entsteht und mit Hilfe der Integralformel (V-128) berechnet werden kann. Dazu lösen wir zunächst die Parabelgleichung nach x^2 auf:

$$0,5 \text{ cm}^{-1} \cdot x^2 = y - 10 \text{ cm} \mid \cdot 2 \text{ cm} \Rightarrow x^2 = 2 \text{ cm} \cdot (y - 10 \text{ cm})$$

Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in die Volumenformel (V-128) ein und erhalten damit für das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Paraboloid}} &= \pi \cdot \int_{10 \text{ cm}}^{18 \text{ cm}} x^2 dy = 2\pi \text{ cm} \cdot \int_{10 \text{ cm}}^{18 \text{ cm}} (y - 10 \text{ cm}) dy = \\
 &= 2\pi \text{ cm} \left[\frac{1}{2} y^2 - 10 \text{ cm} \cdot y \right]_{10 \text{ cm}}^{18 \text{ cm}} = \\
 &= 2\pi \text{ cm} \left[(162 - 180) - (50 - 100) \right] \text{ cm}^2 = \\
 &= 2\pi (-18 + 50) \text{ cm}^3 = 2\pi \cdot 32 \text{ cm}^3 = 201,06 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Für das gesuchte *Rotationsvolumen* V ergibt sich damit der folgende Wert:

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Paraboloid}} = 904,78 \text{ cm}^3 - 201,06 \text{ cm}^3 = 703,72 \text{ cm}^3 \quad \blacksquare$$

10.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve

Wir stellen uns die Aufgabe, die *Länge* einer über dem Intervall $a \leq x \leq b$ gelegenen Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ zu berechnen, und bedienen uns dabei der bereits in Abschnitt 10.3 erwähnten *formalen* Betrachtungsweise. Zunächst zerlegen wir die Kurve in eine große Anzahl von *Segmenten*. Wahllos greifen wir ein von den beiden Randpunkten P und Q begrenztes, *infinitesimal* kurzes *Kurvenstück* (Segment) heraus und ersetzen den Kurvenbogen durch das *Linienelement* ds , d. h. durch die entsprechende Strecke auf der in P errichteten *Kurventangente* (Bild V-61).

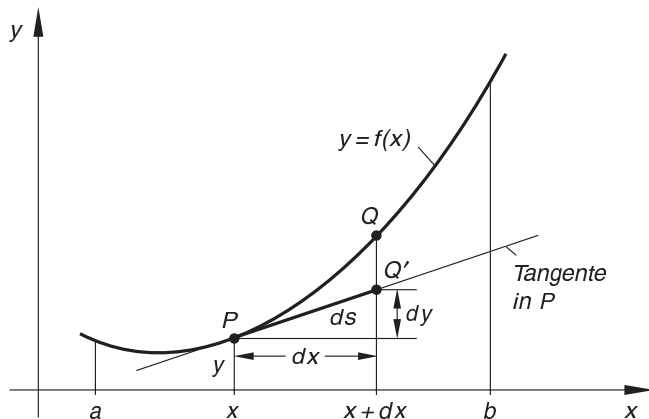


Bild V-61 Zur Bestimmung der Bogenlänge eines ebenen Kurvenstücks

Aus dem eingezeichneten Steigungsdreieck mit den beiden Katheten dx und dy und der Hypotenuse ds folgt dann nach dem *Satz des Pythagoras*:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \cdot \frac{(dx)^2}{(dx)^2} = \left[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right] (dx)^2 = \\ &= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] (dx)^2 = [1 + (y')^2] (dx)^2\end{aligned}\quad (\text{V-129})$$

Damit ist

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{V-130})$$

Mit den restlichen Segmenten verfahren wir in gleicher Weise.

Durch Summation, d. h. Integration über sämtliche Linienelemente¹⁵⁾ erhält man schließlich die folgende Integralformel für die Bogenlänge der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$:

Bogenlänge einer ebenen Kurve (Bild V-61)

Eine *ebene* Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ besitzt die *Bogenlänge*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{V-131})$$

■ Beispiel

Wir wollen die bereits aus der Schulmathematik bekannte Formel für den *Umfang eines Kreises* vom Radius r herleiten (Bild V-62).

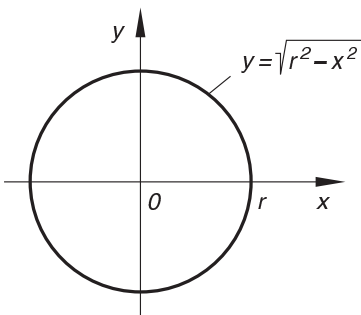


Bild V-62

Zur Berechnung des Kreisumfangs

¹⁵⁾ Andere übliche Bezeichnungen für das *Linienelement* sind *Bogenelement* oder *Bogendifferential*.

Lösung: Aus der Kurvengleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (Gleichung des oberen Halbkreises) erhalten wir durch Differentiation mit Hilfe der Kettenregel

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und weiter

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

Für den Integrand $\sqrt{1 + (y')^2}$ des bei der Umfangsberechnung anfallenden Integrals (V-131) bekommen wir damit den folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Bei der Integration beschränken wir uns wegen der Achsensymmetrie der Kreislinie auf den im 1. Quadranten gelegenen *Viertelkreis* und müssen daher den Integralwert noch mit dem Faktor 4 multiplizieren. Somit gilt:

$$s = 4 \cdot \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dieses Integral lässt sich durch eine *Substitution vom Typ (D)* der Tabelle 2 aus Abschnitt 8.1.2 wie folgt lösen (die Grenzen werden mitsubstituiert):

$$x = r \cdot \sin u, \quad dx = r \cdot \cos u \, du, \quad \sqrt{r^2 - x^2} = r \cdot \cos u,$$

$$u = \arcsin(x/r)$$

$$\text{Untere Grenze: } x = 0 \Rightarrow u = \arcsin 0 = 0$$

$$\text{Obere Grenze: } x = r \Rightarrow u = \arcsin 1 = \pi/2$$

Wir erhalten die aus der Elementarmathematik bereits bekannte Formel für den Umfang eines Kreises:

$$\begin{aligned} s &= 4r \cdot \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{r \cdot \cos u \, du}^{r \cdot \cos u}}{\overbrace{r \cdot \cos u}^{r \cdot \cos u}} = 4r \cdot \int_0^{\pi/2} 1 \, du = \\ &= 4r \left[u \right]_0^{\pi/2} = 2\pi r \end{aligned}$$

■

10.5 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)

Die durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse entstehende Fläche heißt *Mantelfläche* oder *Rotationsfläche* des Drehkörpers.

Rotation einer Kurve um die x -Achse

Der Rotationskörper entsteht durch *Drehung* der Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse (Bild V-63). Wir zerlegen ihn wiederum in eine große Anzahl dünner Scheiben.

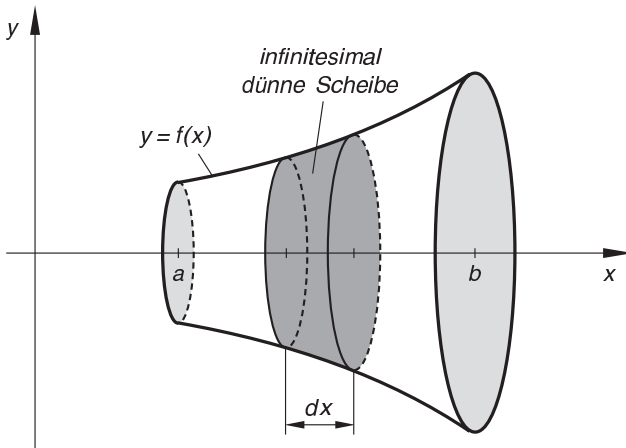


Bild V-63 Zerlegung eines Rotationskörpers in infinitesimal dünne Scheiben der Dicke dx

Eine solche (in Bild V-63 grau unterlegte) Scheibe der Dicke dx erhalten wir durch Drehung des in Bild V-64 skizzierten Kurvenbogens $\widehat{PQ}$ um die x -Achse. Ersetzen wir diesen Bogen durch das zugehörige *Linielement* ds , so erzeugt dieses bei der Rotation um die x -Achse einen *Kegelstumpf*, dessen Mantelfläche einen *Näherungswert* für die Mantelfläche der Scheibe darstellt.

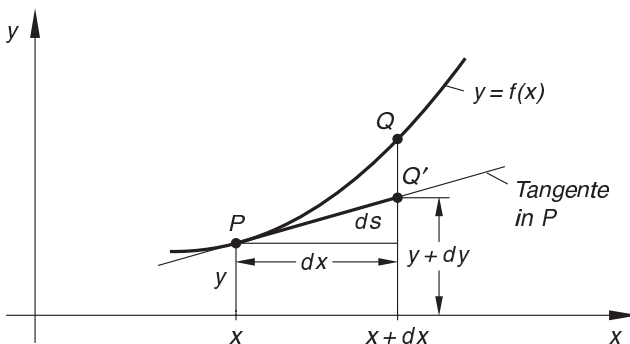


Bild V-64 Zur Bestimmung der Mantelfläche eines zur x -Achse symmetrischen Rotationskörpers

Für die *Mantelfläche eines Kegelstumpfes* liefert uns die Elementarmathematik die bekannte Formel¹⁶⁾

$$M_{\text{Kegelstumpf}} = \pi(r_1 + r_2)s \quad (\text{V-132})$$

Wir übertragen diese Formel auf unseren durch Drehung des Linienelementes ds um die x -Achse erzeugten infinitesimal dünnen Kegelstumpf. Für diesen gilt:

$$r_1 = y, \quad r_2 = y + dy \quad \text{und} \quad s = ds \quad (\text{V-133})$$

Seine Mantelfläche dM_x beträgt somit

$$dM_x = \pi[y + (y + dy)] ds = \pi(2y + dy) ds \quad (\text{V-134})$$

und weiter, da $dy \ll y$ angenommen werden darf:

$$dM_x = \pi \cdot 2y ds = 2\pi \cdot y ds \quad (\text{V-135})$$

Berücksichtigt man noch die Beziehung (V-130) für das Linienelement ds , so ist die Mantelfläche des Kegelstumpfes und damit auch (näherungsweise) die *Mantelfläche der infinitesimal dünnen Scheibe* durch das *Differential*

$$dM_x = 2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{V-136})$$

gegeben. Durch *Integration* erhält man schließlich:

Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche bei Drehung einer Kurve um die x -Achse; Bild V-63)

Bei Drehung einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper mit der *Mantel-* oder *Rotationsfläche*

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{V-137})$$

¹⁶⁾ Die Mantelfläche eines Kegelstumpfes wird nach der Formel

$$M_{\text{Kegelstumpf}} = \pi(r_1 + r_2)s$$

berechnet (siehe hierzu Bild V-65). r_1 und r_2 sind dabei die Radien der beiden Kreisflächen, s die Länge der Mantellinie,

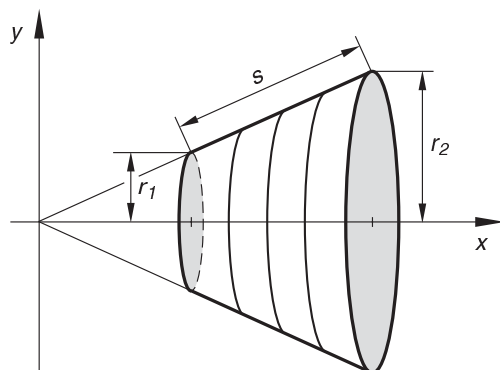


Bild V-65 Kegelstumpf

Rotation einer Kurve um die y-Achse

Bei Rotation einer Kurve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y-Achse erhält man nach analogen Überlegungen den folgenden Formelausdruck für die *Mantel-* oder *Rotationsfläche* des entstandenen Drehkörpers (siehe hierzu Bild V-57):

Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche bei Drehung einer Kurve um die y-Achse; Bild V-57)

Bei Drehung einer Kurve mit der Gleichung $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y-Achse entsteht ein Rotationskörper mit der *Mantel-* oder *Rotationsfläche*

$$M_y = 2\pi \cdot \int_c^d x \cdot \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \cdot \int_c^d g(y) \cdot \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad (\text{V-138})$$

■ Beispiele

- (1) Die Aufgabe besteht in der Berechnung der *Oberfläche (Mantelfläche) einer Kugel* vom Radius r . Die Kugeloberfläche soll dabei durch Drehung des in Bild V-66 skizzierten *Halbkreises* um die x-Achse erzeugt werden.

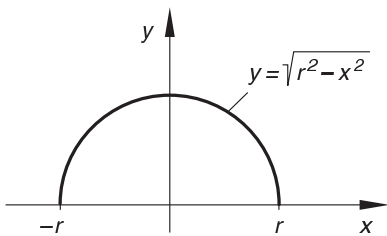


Bild V-66

Durch Rotation eines Halbkreises um die x-Achse entsteht eine Kugel

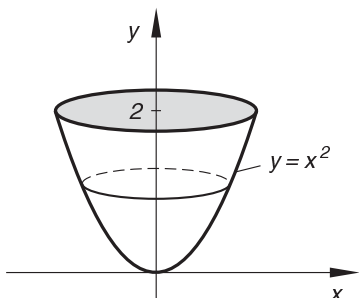
Wir erhalten nach Formel (V-137) mit

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

das folgende Ergebnis, wobei wir uns wegen der *Achsensymmetrie* auf das Integrationsintervall $0 \leq x \leq r$ beschränken durften (Faktor 2):

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi \cdot \int_0^r r dx = \\ &= 4\pi r \cdot \int_0^r 1 dx = 4\pi r \left[x \right]_0^r = 4\pi r (r - 0) = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

- (2) Durch Rotation der Normalparabel $y = x^2$ um die y -Achse entsteht ein *Rotationsparaboloid*. Es ist die Mantelfläche dieses Drehkörpers zu berechnen für den Fall, dass das Paraboloid in der Höhe $h = 2$ abgeschnitten wird (Bild V-67).

**Bild V-67**

Rotationsparaboloid
mit der Höhe $h = 2$

Lösung: Zunächst lösen wir die Parabelgleichung nach x auf und erhalten:

$$y = x^2 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{y} \quad (1. \text{ Quadrant})$$

Ferner ist:

$$x' = g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 1 + (x')^2 = 1 + \frac{1}{4y} = \frac{4y + 1}{4y}$$

Für die Mantelfläche M_y folgt dann nach Formel (V-138):

$$\begin{aligned} M_y &= 2\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{4y+1}{4y}} dy = 2\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{y \cdot \frac{4y+1}{4y}} dy = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{\frac{4y+1}{4}} dy = 2\pi \cdot \int_0^2 \frac{\sqrt{4y+1}}{2} dy = \pi \cdot \int_0^2 \sqrt{4y+1} dy \end{aligned}$$

Dieses Integral wird durch die folgende lineare *Substitution* gelöst (Typ (A) der Tabelle 2 aus Abschnitt 8.1.2):

$$u = 4y + 1, \quad \frac{du}{dy} = 4, \quad dy = \frac{du}{4}$$

$$\text{Untere Grenze: } y = 0 \Rightarrow u = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Obere Grenze: } y = 2 \Rightarrow u = 8 + 1 = 9$$

Für die *Mantelfläche* des Rotationsparaboloids ergibt sich damit der folgende Wert:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \pi \cdot \int_0^2 \sqrt{4y+1} \, dy = \pi \cdot \int_1^9 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^9 \sqrt{u} \, du = \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^9 u^{1/2} \, du = \frac{\pi}{4} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^9 = \frac{\pi}{6} \left[u \sqrt{u} \right]_1^9 = \\
 &= \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \frac{\pi}{6} \cdot 26 = \frac{13}{3} \pi = 13,61
 \end{aligned}$$

■

10.6 Arbeits- und Energiegrößen

Wird ein Massenpunkt m durch eine *konstante* Kraft $\vec{F}$ längs einer Geraden um die Strecke $\vec{s}$ verschoben, so ist die dabei verrichtete *Arbeit* definitionsgemäß gleich dem *Skalarprodukt* aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi = F \cdot s \cdot \cos \varphi = F_s \cdot s \quad (\text{V-139})$$

(siehe hierzu die Definitionsformel (II-87) aus Kap. II, Abschnitt 3.3.5). F_s ist dabei die *Kraftkomponente in der Wegrichtung* und φ der Winkel zwischen der *Kraft*- und der *Wegrichtung* (Bild V-68).

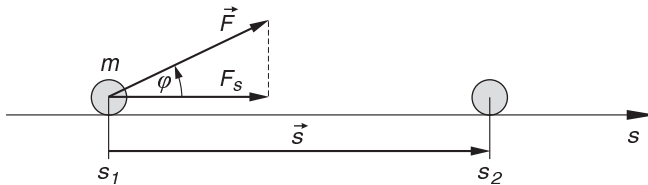


Bild V-68 Zum Begriff der physikalischen Arbeit an einem Massenpunkt

Im *Allgemeinen* jedoch ist die Kraft *nicht* konstant, sondern noch *von Ort zu Ort verschieden*, d. h. eine *Funktion des Ortes* s : $\vec{F} = \vec{F}(s)$. Als Beispiel sei die *Gravitationskraft* genannt (siehe hierzu auch das nachfolgende Beispiel (3)). Bei der Berechnung der *Arbeit*, die eine *ortsabhängige* Kraft $\vec{F}(s)$ mit der in der Wegrichtung wirkenden Komponente $F_s(s)$ bei einer Verschiebung des Massenpunktes längs einer Geraden von s_1 nach s_2 verrichtet, gehen wir wie folgt vor. Die Wegstrecke wird so in eine *große* Anzahl von *Teilstrecken* zerlegt, dass die Kraft längs einer jeden Teilstrecke als *nahezu konstant* angenommen werden kann. Die in dem *infinitesimal kleinen Wegintervall* von s bis $s + ds$ verrichtete *Arbeit* ist dann definitionsgemäß durch das *Skalarprodukt*

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_s(s) \, ds \quad (\text{V-140})$$

gegeben (siehe hierzu Bild V-69).

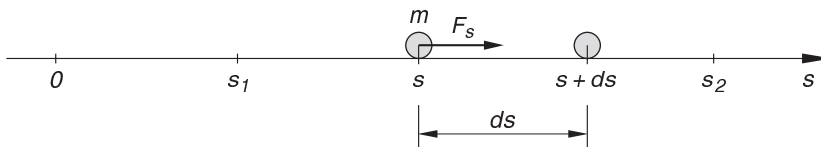


Bild V-69 Zur Herleitung des Arbeitsintegrals bei einer *ortsabhängigen* Kraft

Die längs des *geradlinigen* Weges von s_1 nach s_2 geleistete *Arbeit* W erhält man dann durch Integration:

Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral; Bild V-68)

Eine vom Ort s abhängige Kraft $\vec{F} = \vec{F}(s)$ verrichtet bei einer *geradlinigen* Verschiebung eines Massenpunktes die *Arbeit*

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds \quad (\text{V-141})$$

Dabei bedeuten:

$F_s(s)$: Kraftkomponente in *Wegrichtung* (ortsabhängig)

s_1, s_2 : Wegmarken *vor* bzw. *nach* der Verschiebung

Anmerkung

Das durch Gleichung (V-141) definierte *Arbeitsintegral* wird auch als *Wegintegral der Kraft* bezeichnet. Die Integration erfolgt über die ortsabhängige Kraftkomponente in Wegrichtung.

■ **Beispiele**

(1) **Kinetische Energie einer Masse**

Wir wollen die *kinetische Energie* eines Körpers der Masse m berechnen, der durch eine (konstante oder ortsabhängige) Kraft $\vec{F}$ aus der Ruhe heraus auf die *Endgeschwindigkeit* v_0 beschleunigt wird (Bild V-70).

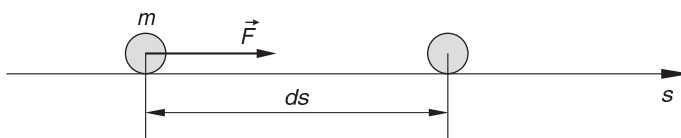


Bild V-70

Für die beschleunigende Kraft vom Betrage F gilt nach dem *Grundgesetz der Mechanik*:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \quad \left(a = \frac{dv}{dt} \right)$$

(a : Beschleunigung; v : Geschwindigkeit). Sie verrichtet dabei auf der *infinitesimal kleinen Wegstrecke* ds die Arbeit

$$dW = F ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$$

Denn der Differentialquotient ds/dt ist nichts anderes als die *Momentangeschwindigkeit* v . Durch *Integration* erhält man schließlich die *Beschleunigungsarbeit*

$$W = \int_{v=0}^{v=v_0} dW = \int_0^{v_0} m v dv = m \cdot \int_0^{v_0} v dv = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^{v_0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Definitionsgemäß besitzt dann die Masse m *kinetische Energie* vom gleichen Betrage.

(2) Spannungsarbeit an einer elastischen Feder

Um eine *elastische Feder* aus der Gleichgewichtslage heraus um die Strecke s_0 zu *dehnen*, muss man mit einer Kraft $F(s)$ einwirken, die in *jeder* Lage der momentanen Rückstellkraft $F^* = -cs$ (*Hookesches Gesetz*) das Gleichgewicht hält (Bild V-71)¹⁷⁾:

$$F(s) = -F^* = cs \quad (c: \text{Federkonstante})$$

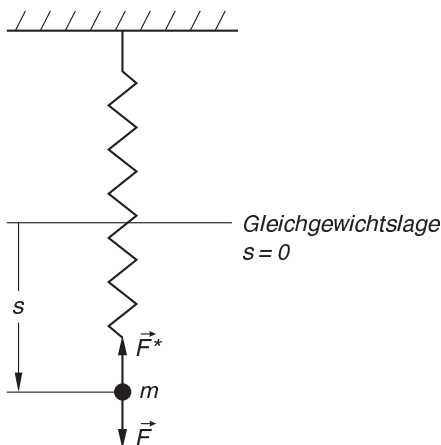


Bild V-71

Zur Berechnung der Spannungsarbeit an einer elastischen Feder

¹⁷⁾ Alle Kräfte wirken in der *Längsrichtung* der Feder.

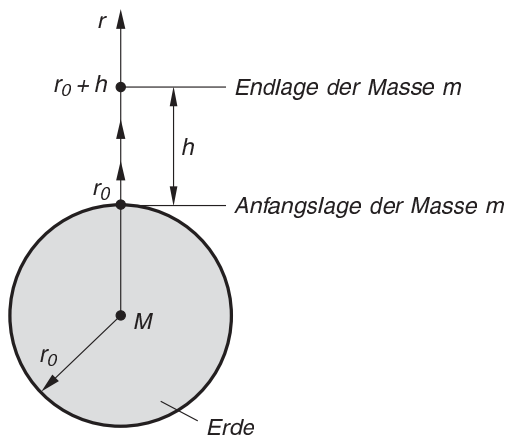
Die dabei verrichtete *Arbeit* beträgt dann nach Formel (V-141) unter Berücksichtigung von $F_s(s) = F(s) = cs$:

$$W = \int_0^{s_0} F_s(s) ds = \int_0^{s_0} cs ds = c \cdot \int_0^{s_0} s ds = c \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_0^{s_0} = \frac{1}{2} cs_0^2$$

Die gespannte Feder besitzt jetzt *Spannungsenergie* vom gleichen Betrage.

(3) Arbeit im Gravitationsfeld der Erde

Wir berechnen die *Arbeit*, die man im Gravitationsfeld der Erde aufwenden muss, um eine auf der *Erdoberfläche* liegende Masse m *entgegen* der Schwerkraft um die Strecke h in *radialer* Richtung anzuheben (Bild V-72; r_0 ist der Erdradius).



M : Erdmasse (im Erdmittelpunkt konzentriert)

r_0 : Erdradius

Bild V-72

Arbeit im Gravitationsfeld der Erde

Dazu benötigen wir eine Kraft $F(r)$, die der in Richtung Erdmittelpunkt wirkenden *Gravitationskraft*

$$F^*(r) = -f \frac{mM}{r^2} \quad (r > 0)$$

das *Gleichgewicht* hält. Somit gilt:

$$F(r) = -F^*(r) = f \frac{mM}{r^2}$$

Dabei ist f die Gravitationskonstante und r der Abstand der Masse m vom Erdmittelpunkt.

Beim *Anheben* um die Strecke h wird dabei die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_0+h} F(r) dr = f m M \cdot \int_{r_0}^{r_0+h} \frac{1}{r^2} dr = f m M \cdot \int_{r_0}^{r_0+h} r^{-2} dr = \\ &= f m M \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_0}^{r_0+h} = f m M \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r_0+h} = f m M \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+h} \right] = \\ &= f m M \left[\frac{r_0+h-r_0}{r_0(r_0+h)} \right] = f m M \frac{h}{r_0(r_0+h)} \end{aligned}$$

verrichtet. Für $h \ll r_0$, d. h. in *Erddne* gilt $r_0+h \approx r_0$ und man erhält hieraus die bereits aus der Schulphysik bekannte Formel für die *Hubarbeit* (bzw. *potentielle Energie*):

$$W \approx f m M \frac{h}{r_0^2} = m \underbrace{\left(f \frac{M}{r_0^2} \right)}_g h = m g h$$

g ist dabei die *Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche* (folgt aus der Gleichung $m g = f \frac{m M}{r_0^2}$).

(4) Arbeit eines Gases

Wir betrachten eine in einem zylindrischen Gefäß eingeschlossene *Gasmenge*, deren *Zustand* durch die drei *Zustandsvariablen* p (*Druck*), V (*Volumen*) und T (*absolute Temperatur*) beschrieben wird. Das Gefäß sei dabei durch einen (beweglichen) Kolben abgeschlossen (Bild V-73).

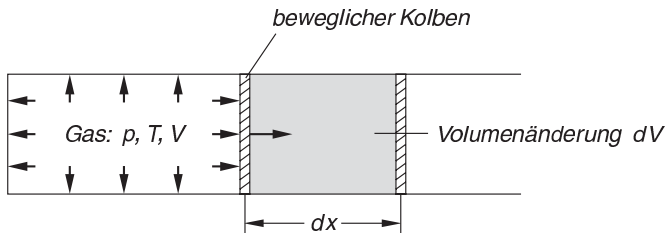


Bild V-73 Zur Berechnung der isothermen Ausdehnungsarbeit eines Gases

Der Gasdruck p erzeugt eine auf den Kolben nach *außen* wirkende Kraft vom Betrage $F = pA$ (A : Querschnittsfläche des Kolbens). Durch eine gleich große *Gegenkraft* wird zunächst eine Ausdehnung des Gases verhindert. Ist die äußere Kraft jedoch etwas *kleiner* als die Druckkraft des Gases, so dehnt sich dieses aus und verrichtet bei einer Verschiebung des Kolbens um die *infinitesimal kleine Strecke* dx die *Arbeit*

$$dW = F dx = pA dx = p dV$$

Dabei ist $dV = A dx$ die *differentielle Zunahme* des Gasvolumens bei dieser Verschiebung. Die bei einer *isothermen Ausdehnung* vom Anfangsvolumen V_1 auf das Endvolumen V_2 *insgesamt* vom Gas verrichtete *Arbeit* erhält man dann durch *Integration*¹⁸⁾:

$$W = \int_{V=V_1}^{V=V_2} dW = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

Wir berechnen jetzt mit dieser Integralformel die *isotherme Ausdehnungsarbeit eines realen Gases*, dessen Verhalten in vielen Fällen in guter Näherung durch die sog. *van der Waalssche Zustandsgleichung*

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

beschrieben werden kann (a und b sind dabei zwei *stoffabhängige* positive Konstanten; n : Molzahl; R : *allgemeine Gaskonstante*). Durch Auflösen dieser Gleichung nach p erhält man

$$p = \frac{nRT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (\text{mit } V > 0)$$

und damit bei *isothermer* Prozessführung ($T = \text{constant}$):

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = \\ &= \left[nRT \cdot \ln(V - b) + \frac{a}{V} \right]_{V_1}^{V_2} = nRT \left[\ln(V - b) \right]_{V_1}^{V_2} + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{V} \right]_{V_1}^{V_2} = \\ &= nRT [\ln(V_2 - b) - \ln(V_1 - b)] + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \\ &= nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right) + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \end{aligned}$$

Für ein *ideales Gas* ist $a = b = 0$ und die *van der Waalssche Zustandsgleichung* geht in die bekannte *Zustandsgleichung eines idealen Gases* über:

$$pV = nRT$$

Die *isotherme Ausdehnungsarbeit* eines *idealen Gases* beträgt dann

$$W = nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

■

¹⁸⁾ *Isotherm* bedeutet: bei *konstanter* Temperatur. Der Druck p hängt dann nur vom Volumen V ab.

10.7 Lineare und quadratische Mittelwerte

Mittelwerte spielen in Naturwissenschaft und Technik eine bedeutende Rolle (z. B.: mittlere Geschwindigkeit eines Fahrzeugs in einem bestimmten Zeitraum, Effektivwerte von Strom und Spannung bei Wechselströmen usw.). Wir unterscheiden dabei zwischen *linearen* und *quadratischen Mittelwerten*.

Linearer Mittelwert

Definition: Unter dem *linearen Mittelwert* einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ versteht man die Größe

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-142})$$

Anmerkung

Man beachte, dass der lineare Mittelwert vom Intervall $a \leq x \leq b$ abhängig ist.

Der *lineare Mittelwert* einer Funktion lässt sich wie folgt *geometrisch* deuten (wir setzen dabei $f(x) > 0$ voraus):

Über dem Intervall $a \leq x \leq b$ soll ein *Rechteck* mit der (zunächst noch unbekannten) Höhe h errichtet werden und zwar so, dass es den *gleichen* Flächeninhalt besitzt wie das von der Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den beiden Parallelen $x = a$ und $x = b$ begrenzte Flächenstück (Bild V-74).

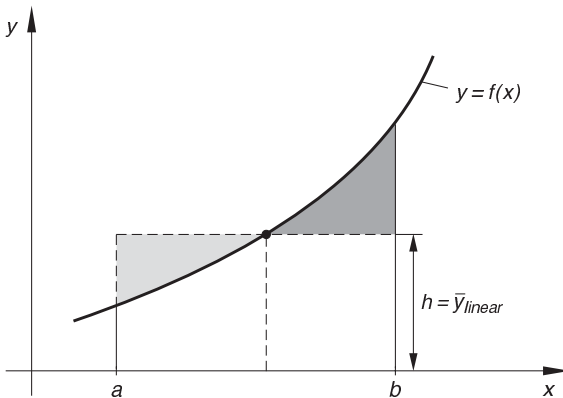


Bild V-74 Zum Begriff des *linearen Mittelwertes* einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ (die beiden grau unterlegten Teilflächen sind flächengleich)

Somit muss gelten:

$$h(b-a) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-143})$$

Für die Höhe h erhalten wir daraus den Wert

$$h = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (\text{V-144})$$

Dies aber ist genau der *lineare Mittelwert* der Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$, d. h. es gilt $h = \bar{y}_{\text{linear}}$. Der *lineare Mittelwert* ist somit eine Art *mittlere Ordinate* der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$.

Quadratischer Mittelwert

Definition: Unter dem *quadratischen Mittelwert einer Funktion* $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ versteht man die Größe

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad (\text{V-145})$$

Zeitliche Mittelwerte

In der *Elektrotechnik* werden *lineare* und *quadratische* Mittelwerte von *zeitabhängigen* periodischen Funktionen $y = f(t)$ benötigt. Sie werden jeweils über eine Periodendauer T gebildet. Beispiele dafür sind der *Effektivwert* eines Wechselstroms bzw. einer Wechselspannung sowie die *durchschnittliche Wirkleistung* eines Wechselstroms.

Zusammenfassend gilt somit:

Linearer und quadratischer zeitlicher Mittelwert einer periodischen Funktion

Der *lineare* bzw. *quadratische zeitliche Mittelwert* einer periodischen Funktion $y = f(t)$ mit der Periodendauer T lässt sich wie folgt berechnen (die Integration erfolgt über ein Periodenintervall der Länge T):

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) dt \quad (\text{V-146})$$

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} [f(t)]^2 dt} \quad (\text{V-147})$$

■ Beispiele

- (1) Wir berechnen den *linearen Mittelwert* der Logarithmusfunktion $y = \ln x$ im Intervall $1 \leq x \leq 5$ (Bild V-75)

$$\begin{aligned}\bar{y}_{\text{linear}} &= \frac{1}{5-1} \cdot \int_1^5 \ln x \, dx = \frac{1}{4} \left[x(\ln x - 1) \right]_1^5 = \\ &= \frac{1}{4} \left[5(\ln 5 - 1) - 1(\ln 1 - 1) \right] = \frac{1}{4} (3,0472 + 1) \approx 1,012\end{aligned}$$

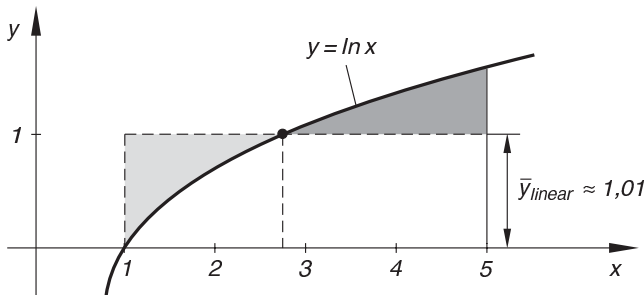


Bild V-75

- (2) **Durchschnittsgeschwindigkeit eines Fahrzeugs in einem Zeitintervall**

Aus der Physik ist bekannt: Die *Durchschnittsgeschwindigkeit* $\bar{v}$ eines Fahrzeugs in einem Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ wird ermittelt, indem man den in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ durch das Zeitintervall dividiert:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

(siehe hierzu Bild V-76).

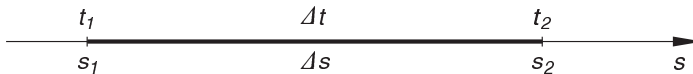


Bild V-76

$\bar{v}$ ist aber nichts anderes als der *lineare Mittelwert* des Geschwindigkeit-Zeit-Gesetzes $v = v(t)$ im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$. Denn aus der Definitionsformel (V-142) folgt unmittelbar unter Beachtung der bereits aus Abschnitt 10.1.1 bekannten Beziehung $s(t) = \int v(t) \, dt$:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\text{linear}} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[s(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} [s(t_2) - s(t_1)] = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v}\end{aligned}$$

(unter Beachtung von $s(t_1) = s_1$ und $s(t_2) = s_2$).

(3) **Durchschnittliche Leistung P eines sinusförmigen Wechselstroms**

In einem *Wechselstromkreis* erzeuge die (zeitabhängige) sinusförmige Wechselspannung $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ den phasenverschobenen Wechselstrom $i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ gleicher Kreisfrequenz ω (u_0, i_0 : Scheitelwerte; φ : Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung). Die *momentane (zeitabhängige) Leistung* p ist dann definitionsgemäß das Produkt aus Spannung u und Stromstärke i :

$$\begin{aligned} p &= p(t) = u(t) \cdot i(t) = u_0 i_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= u_0 i_0 \cdot \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega t) \cdot \sin \varphi] = \\ &= u_0 i_0 [\cos \varphi \cdot \sin^2(\omega t) + \sin \varphi \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

(wir haben dabei das *Additionstheorem der Sinusfunktion* verwendet). Den *linearen zeitlichen Mittelwert* während einer Periode T berechnet man definitionsgemäß aus Gleichung (V-146), wobei wir $\bar{p}_{\text{linear}} = P$ setzen:

$$\begin{aligned} P &= \bar{p}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \\ &= \frac{u_0 i_0}{T} \cdot \int_0^T [\cos \varphi \cdot \sin^2(\omega t) + \sin \varphi \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] dt = \\ &= \frac{u_0 i_0}{T} \left\{ \cos \varphi \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \sin \varphi \cdot \int_0^T \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt \right\} \end{aligned}$$

In der *Integraltafel* der Formelsammlung finden wir für die beiden Integrale die folgenden Lösungen:

$$\int \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2\omega t) \quad (\text{Integral Nr. 205})$$

$$\int \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} \cdot \sin^2(\omega t) \quad (\text{Integral Nr. 254})$$

Für die *durchschnittliche Wirkleistung* während einer Periode erhalten wir damit unter Berücksichtigung von $\omega T = 2\pi$ und $\sin 0 = \sin(2\pi) = \sin(4\pi) = 0$ den folgenden Ausdruck für die Wirkleistung:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{u_0 i_0}{T} \left\{ \cos \varphi \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^T + \sin \varphi \left[\frac{1}{2\omega} \cdot \sin^2(\omega t) \right]_0^T \right\} = \\
 &= \frac{u_0 i_0}{T} \left\{ \cos \varphi \left(\frac{1}{2} T - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2\omega T) \right) + \sin \varphi \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \sin^2(\omega T) \right\} = \\
 &= \frac{u_0 i_0}{T} \left\{ \cos \varphi \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(4\pi) \right) + \frac{\sin \varphi}{2\omega} \cdot \sin^2(2\pi) \right\} = \\
 &= \frac{u_0 i_0}{T} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{T}{2} = \frac{u_0 i_0}{2} \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Die *Scheitelwerte* u_0 und i_0 lassen sich noch wie folgt durch die *Effektivwerte* U und I ausdrücken (siehe hierzu auch das nachfolgende Beispiel):

$$u_0 = U\sqrt{2}, \quad i_0 = I\sqrt{2}$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen erhält man für den *Mittelwert der Wirkleistung* eines sinusförmigen Wechselstroms

$$P = \frac{u_0 i_0}{2} \cdot \cos \varphi = \frac{U\sqrt{2} \cdot I\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \varphi = UI \cdot \cos \varphi$$

(4) Effektivwerte von Strom und Spannung (quadratische Mittelwerte)

Der *Effektivwert* eines Wechselstroms bzw. einer Wechselspannung ist definitionsgemäß der *quadratische zeitliche Mittelwert* während einer Periode T :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [u(t)]^2 dt}$$

Für einen *sinusförmigen* Wechselstrom $i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t)$ erhält man unter Berücksichtigung von $\omega T = 2\pi$ und $\sin 0 = \sin(4\pi) = 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T [i(t)]^2 dt &= i_0^2 \cdot \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}_{\text{Integral Nr. 205}} = i_0^2 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^T = \\
 &= i_0^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2\omega T) \right) = i_0^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \cdot \underbrace{\sin(4\pi)}_0 \right) = \frac{i_0^2 T}{2}
 \end{aligned}$$

Der *Effektivwert* des Wechselstroms beträgt somit:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{i_0^2 T}{2}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot i_0$$

Analog berechnet sich der *Effektivwert* einer sinusförmigen Wechselspannung $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ zu

$$U = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot u_0 \quad \blacksquare$$

10.8 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper

10.8.1 Grundbegriffe

Statisches Moment einer Kraft

Ein *Massenpunkt* der Masse m besitze von einer (vertikalen) Bezugsachse den *senkrechten* Abstand r (Bild V-77). Dann erzeugt die Gewichtskraft $G = mg$ definitionsgemäß ein *statisches Moment*¹⁹⁾ vom Betrage

$$M = Gr = mgr \quad (\text{V-148})$$

Bei einem *räumlichen Körper* muss die Masse m zunächst in eine *große* Anzahl von *Teilmassen* zerlegt werden. Wir betrachten jetzt ein solches *infinitesimal kleines Massenelement* dm im senkrechten Abstand r von der Bezugsachse (Bild V-78).

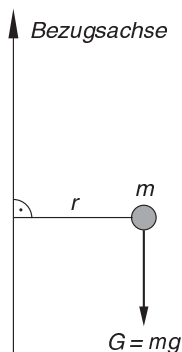


Bild V-77

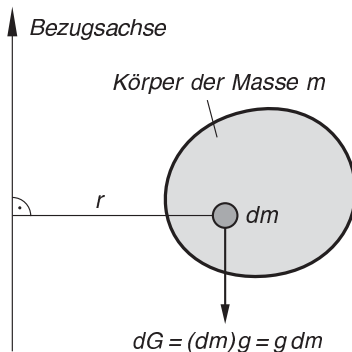


Bild V-78

Dieses Massenelement liefert dann zum *Gesamtmoment* M den folgenden Beitrag:

$$dM = (dG)r = (dm)gr = gr dm \quad (\text{V-149})$$

($dG = dm \cdot g = g dm$ ist das Gewicht des Massenelementes dm).

Durch Aufsummieren *sämtlicher* Teilbeiträge dM , d. h. durch *Integration* erhält man schließlich das *Gesamtmoment* M :

$$M = \int_{(m)} dM = \int_{(m)} gr dm \quad (\text{V-150})$$

¹⁹⁾ Andere, übliche Bezeichnungen sind *Drehmoment* oder *Moment 1. Ordnung*.

Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt eines Körpers

Unter dem *Schwerpunkt* S eines Körpers (auch *Massenmittelpunkt* genannt) wird definitionsgemäß derjenige *Punkt* verstanden, in dem die *Gesamtmasse* des Körpers vereinigt gedacht werden muss, damit dieser fiktive Massenpunkt ein *gleich großes* statisches Moment erzeugt wie der reale Körper selbst (Bild V-79).

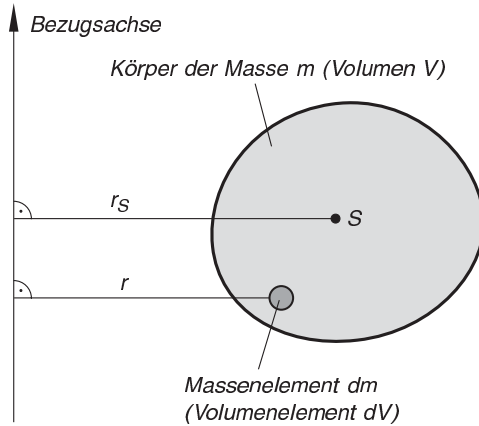


Bild V-79

Schwerpunkt eines räumlichen Körpers

Ist r_S der *senkrechte* Abstand des *Schwerpunktes* S von der Bezugsachse (bzw. Bezugsebene), so gilt also

$$M = m g r_S = \int_{(m)} g r \, dm = g \cdot \int_{(m)} r \, dm \quad (\text{V-151})$$

und weiter (nach Kürzen durch g)

$$m r_S = \int_{(m)} r \, dm \quad (\text{V-152})$$

Bei allen weiteren Betrachtungen gehen wir von einem *homogenen* Körper der *konstanten* Dichte ϱ aus. Da $m = \varrho V$ und somit $dm = \varrho \, dV$ ist, lässt sich die Beziehung (V-152) auch auf die Form

$$\varrho V r_S = \int_{(V)} r \varrho \, dV = \varrho \cdot \int_{(V)} r \, dV \quad \text{oder} \quad V r_S = \int_{(V)} r \, dV \quad (\text{V-153})$$

bringen. dV ist dabei das *Volumen* des Massenelementes dm und wird daher auch als *Volumenelement* bezeichnet, V ist das *Gesamtvolumen* des Körpers mit der Masse m . Die Integration ist über das *gesamte* Volumen zu erstrecken (Summation über sämtliche Volumenelemente). Aus dieser Gleichung gewinnt man für den *Schwerpunktsabstand* r_S die wichtige Integralformel

$$r_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} r \, dV \quad (\text{V-154})$$

Durch Wahl einer geeigneten Bezugsachse in *jeder* der drei Koordinatenebenen erhält man hieraus die folgenden Formeln für die *Schwerpunktskoordinaten* x_S , y_S und z_S :

Schwerpunkt eines homogenen räumlichen Körpers (Bild V-79)

Für die *Schwerpunktskoordinaten* x_S , y_S und z_S eines *homogenen* räumlichen Körpers vom Volumen V gelten die folgenden Integralformeln:

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} x \, dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} y \, dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} z \, dV \quad (\text{V-155})$$

10.8.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

Bei *flächenhaften* Körpern mit *konstanter* Dicke h wie z. B. *dünnen Scheiben* oder *Platten* liegt der Schwerpunkt S im Abstand $h/2$ oberhalb der (ebenen) Grundfläche vom Flächeninhalt A (die Grundfläche legen wir in die x, y -Ebene). Die *Schwerpunktskoordinaten* x_S , y_S und z_S lassen sich dann aus den Gleichungen (V-155) unter Berücksichtigung von $V = Ah$ und $dV = (dA)h = h \, dA$ wie folgt bestimmen:

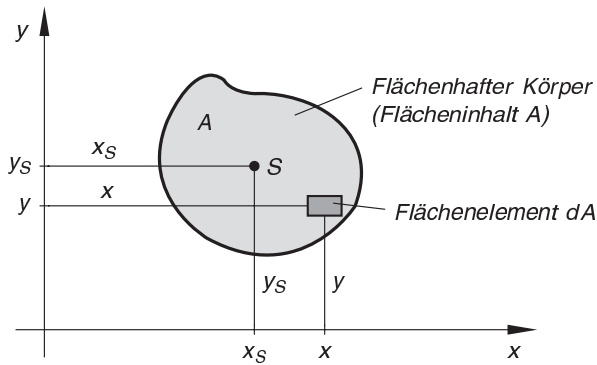
$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} x \, dV = \frac{1}{Ah} \cdot \int_{(A)} x h \, dA = \frac{h}{Ah} \cdot \int_{(A)} x \, dA = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} x \, dA \\ y_S &= \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} y \, dV = \frac{1}{Ah} \cdot \int_{(A)} y h \, dA = \frac{h}{Ah} \cdot \int_{(A)} y \, dA = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} y \, dA \quad (\text{V-156}) \\ z_S &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Dabei ist die Integration über die *gesamte Grundfläche* A zu erstrecken. Für $h \rightarrow 0$ erhält man eine in der x, y -Ebene liegende Fläche vom Flächeninhalt A , deren *Schwerpunktskoordinaten* x_S und y_S wie folgt berechnet werden ($z_S = 0$ für $h \rightarrow 0$; siehe Bild V-80):

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche (Bild V-80)

Für die *Schwerpunktskoordinaten* x_S und y_S einer *homogenen* ebenen Fläche vom Flächeninhalt A gelten die folgenden Integralformeln:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} x \, dA, \quad y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} y \, dA \quad (\text{V-157})$$

**Bild V-80**

Schwerpunkt S eines flächenhaften Körpers konstanter Dichte

Anmerkungen

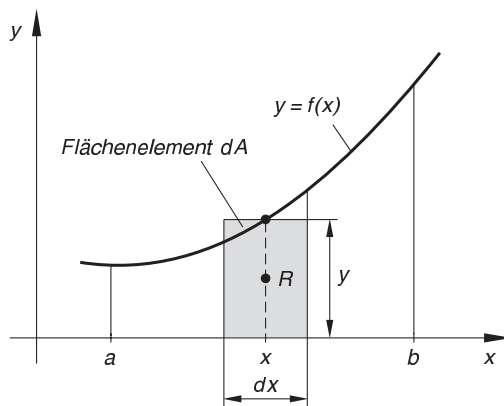
- (1) *Modell* einer homogenen Fläche: hauchdünne homogene Platte.
- (2) Summiert, d. h. integriert wird über *alle* Flächenelemente dA in der Fläche A .
- (3) Die in den Gleichungen (V-157) auftretenden Integrale sind die wie folgt definierten *statischen Momente der Fläche A*:

$$M_x = \int_{(A)} dM_x = \int_{(A)} y dA = y_S A: \text{ Statisches Moment bezüglich der } x\text{-Achse}$$

$$M_y = \int_{(A)} dM_y = \int_{(A)} x dA = x_S A: \text{ Statisches Moment bezüglich der } y\text{-Achse}$$

$dM_x = y dA$ und $dM_y = x dA$ sind dabei die *statischen Momente* des Flächenelementes dA bezüglich der x -Achse bzw. y -Achse.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der *Schwerpunktskoordinaten* x_S und y_S einer *homogenen ebenen Fläche* über, die von der Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ berandet wird (Bild V-81).

**Bild V-81**

Zur Berechnung des Schwerpunktes einer homogenen ebenen Fläche

In der bereits bekannten Weise zerlegen wir zunächst die Fläche in eine große Anzahl von *rechteckigen* Streifen. Das im Bild V-81 skizzierte (grau unterlegte) Flächenelement besitzt die Breite dx , die Höhe y und somit den Flächeninhalt $dA = y dx$. Der Schwerpunkt R dieses Streifens liegt dann aus Symmetriegründen im Schnittpunkt der beiden *Flächendiagonalen*. Seine Koordinaten x_R und y_R lauten daher wie folgt:

$$x_R = x, \quad y_R = \frac{1}{2} y \quad (\text{V-158})$$

Zu den *statischen Momenten* M_x und M_y der *Gesamtfläche* A liefert dieses Flächenelement dann die folgenden Beiträge:

$$dM_x = y_R dA = \frac{1}{2} y(y dx) = \frac{1}{2} y^2 dx \quad (\text{V-159})$$

$$dM_y = x_R dA = x(y dx) = xy dx$$

Durch *Summation* über *sämtliche* in der Fläche liegenden streifenförmigen Flächenelemente, d. h. durch *Integration* in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ erhalten wir schließlich folgende Integralformeln für die statischen Momente M_x und M_y der Fläche:

$$M_x = \int_{(A)} dM_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{V-160})$$

$$M_y = \int_{(A)} dM_y = \int_a^b xy dx = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Andererseits ist $M_x = y_S A$ und $M_y = x_S A$. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen gehen die Gleichungen (V-160) über in

$$y_S A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{V-161})$$

$$x_S A = \int_a^b xy dx = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Durch Auflösen nach x_S bzw. y_S gewinnt man hieraus die folgenden *Integralformeln* für die Koordinaten des *Flächenschwerpunktes* S :

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse (Bild V-81)

Die Koordinaten x_S und y_S des *Schwerpunktes* einer *homogenen* ebenen Fläche, die von einer Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ und der x -Achse berandet wird, lassen sich wie folgt berechnen:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b xy \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b y^2 \, dx = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx$$
(V-162)

A : Flächeninhalt, berechnet nach der Integralformel (V-119)

Voraussetzung: Die Kurve $y = f(x)$ liegt im Intervall $a \leq x \leq b$ oberhalb der x -Achse.

Auf analoge Art und Weise lassen sich Formelausdrücke für die Schwerpunktskoordinaten x_S bzw. y_S einer Fläche herleiten, die von den beiden Kurven $y_o = f_o(x)$ und $y_u = f_u(x)$ und den beiden Geraden $x = a$ und $x = b$ berandet wird (Bild V-82). Wir setzen dabei voraus, dass überall im Intervall $a \leq x \leq b$ die Bedingung $f_o(x) \geq f_u(x)$ erfüllt ist.

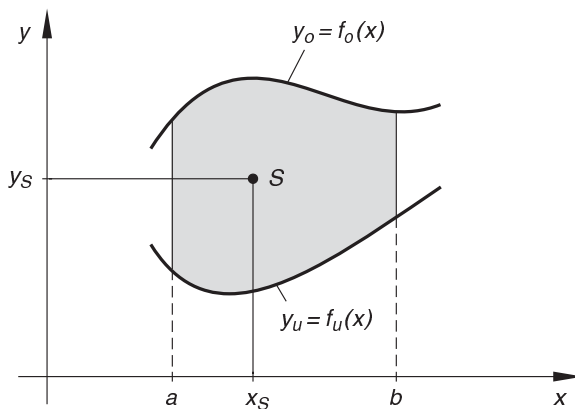


Bild V-82

Schwerpunkt einer von zwei Kurven berandeten homogenen Fläche

Die Integralformeln für die Koordinaten des *Flächenschwerpunktes* lauten dann wie folgt:

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche zwischen zwei Kurven (Bild V-82)

Die Koordinaten x_S und y_S des *Schwerpunktes* einer *homogenen* ebenen Fläche, die von den Kurven $y_o = f_o(x)$ und $y_u = f_u(x)$ und den beiden Parallelen $x = a$ und $x = b$ berandet wird, lassen sich wie folgt berechnen:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x(y_o - y_u) dx = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x[f_o(x) - f_u(x)] dx \quad (\text{V-163})$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2) dx = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b [(f_o(x))^2 - (f_u(x))^2] dx$$

A: Flächeninhalt, berechnet nach der Integralformel (V-122)

Voraussetzung: $f_o(x) \geq f_u(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$

Anmerkung

Ist die untere Berandung die x -Achse, also $y_u = f_u(x) = 0$, so erhält man aus den Integralformeln (V-163) den bereits bekannten *Sonderfall* (V-162).

■ **Beispiele**

- (1) Wir berechnen die *Schwerpunktskoordinaten* einer *oberhalb* der x -Achse liegenden homogenen *Halbkreisfläche* vom Radius R (hauchdünne halbkreisförmige Platte aus einem homogenen Material; Bild V-83).

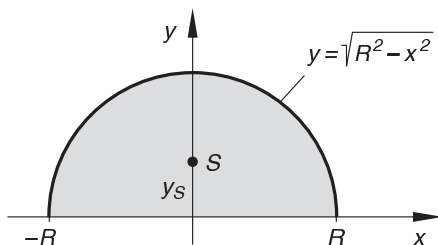


Bild V-83 Zur Berechnung der Schwerpunktskoordinaten einer homogenen Halbkreisfläche

Aus *Symmetriegründen* liegt der Schwerpunkt S auf der y -Achse, also ist $x_S = 0$ (eine Rechnung ist somit überflüssig). Für die Ordinate y_S des Flächenschwer-

punktes S erhalten wir nach Formel (V-162) mit $A = \pi R^2/2$ und unter Berücksichtigung der *Achsensymmetrie*:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{\pi R^2} \cdot \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \\ &= \frac{4}{3\pi} R = 0,424 R \end{aligned}$$

Flächenschwerpunkt: $S = (0; 0,424 R)$

- (2) Die Aufgabe besteht in der Berechnung des *Schwerpunktes* S des in Bild V-84 skizzierten flächenhaften *Werkstückes* aus einem *homogenen* Material.

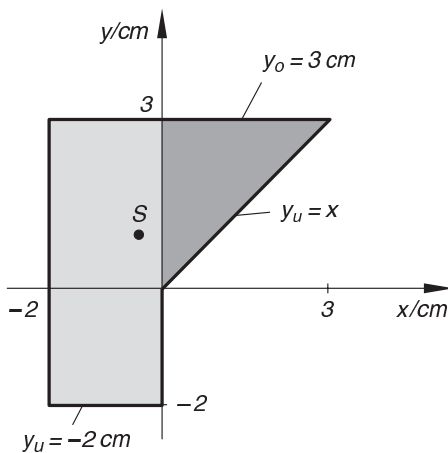


Bild V-84

Lösung: Wir berechnen zunächst auf *elementarem* Wege den Flächeninhalt A des Werkstückes, das sich aus einem Rechteck (*hellgrau* unterlegt) und einem gleichschenkligen Dreieck (*dunkelgrau* unterlegt) zusammensetzt:

$$A = 2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2 + 4,5 \text{ cm}^2 = 14,5 \text{ cm}^2$$

Das Flächenstück wird im Intervall $-2 \leq x/\text{cm} \leq 3$ *oben* von der Geraden $y_o = f_o(x) = 3 \text{ cm}$ berandet. Die *untere* Berandung besteht dagegen aus *zwei* Teilstücken:

$$y_u = f_u(x) = \begin{cases} -2 \text{ cm} & -2 \leq x/\text{cm} \leq 0 \\ x & 0 \leq x/\text{cm} \leq 3 \end{cases} \quad \text{für}$$

Wir berechnen zunächst die *Schwerpunktskoordinate* x_S , wobei wir das Integral in *zwei* Teilintegrale aufspalten müssen:

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{1}{14,5 \text{ cm}^2} \left(\int_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} x (3 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) dx + \int_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} x (3 \text{ cm} - x) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{14,5 \text{ cm}^2} \left(\int_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} 5 \text{ cm} \cdot x dx + \int_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} (3 \text{ cm} \cdot x - x^2) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{14,5 \text{ cm}^2} \left(\left[2,5 \text{ cm} \cdot x^2 \right]_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} + \left[1,5 \text{ cm} \cdot x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} \right) = \\
 &= \frac{1}{14,5 \text{ cm}^2} (-10 \text{ cm}^3 + 4,5 \text{ cm}^3) = \frac{-5,5 \text{ cm}^3}{14,5 \text{ cm}^2} = -0,38 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Für die *Schwerpunktskoordinate* y_S erhält man analog:

$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{1}{29 \text{ cm}^2} \left(\int_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} (9 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2) dx + \int_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} (9 \text{ cm}^2 - x^2) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{29 \text{ cm}^2} \left(\int_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} 5 \text{ cm}^2 dx + \int_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} (9 \text{ cm}^2 - x^2) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{29 \text{ cm}^2} \left(\left[5 \text{ cm}^2 \cdot x \right]_{-2 \text{ cm}}^{0 \text{ cm}} + \left[9 \text{ cm}^2 \cdot x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{0 \text{ cm}}^{3 \text{ cm}} \right) = \\
 &= \frac{1}{29 \text{ cm}^2} (10 \text{ cm}^3 + 18 \text{ cm}^3) = \frac{28 \text{ cm}^3}{29 \text{ cm}^2} = 0,97 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Der *Flächenschwerpunkt* S besitzt damit die folgenden Koordinaten:

$$x_S = -0,38 \text{ cm}, \quad y_S = 0,97 \text{ cm}.$$

■

10.8.3 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers

Bei einem homogenen *Rotationskörper* liegt der *Schwerpunkt* stets auf der *Drehachse*. Fällt ferner die Rotationsachse in eine der Koordinatenachsen (x -Achse oder y -Achse), so besitzen *zwei* der drei Schwerpunktskoordinaten den Wert *Null*.

Rotation einer Kurve um die x -Achse

Der Rotationskörper wird durch Drehung des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse erzeugt (Bild V-85).

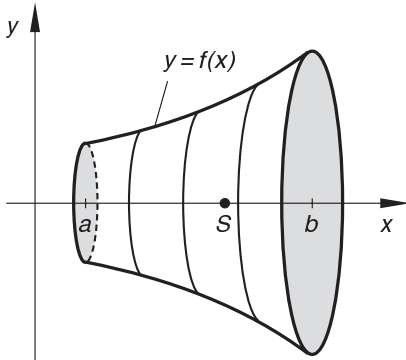


Bild V-85

Zur Berechnung des Schwerpunktes eines zur x -Achse symmetrischen homogenen Rotationskörpers

Der *Schwerpunkt* S liegt daher auf der x -Achse, d. h. es ist $y_S = z_S = 0$. Für die x -Koordinate folgt dann aus Gleichung (V-155) unter Berücksichtigung des Volumenelementes $dV_x = \pi y^2 dx$ (Zylinderscheibe der Dicke dx , Radius y):

$$x_S = \frac{1}{V_x} \cdot \int_{(V)} x dV_x = \frac{1}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot \pi y^2 dx = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 dx \quad (\text{V-164})$$

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers (Rotationsachse = x -Achse; Bild V-85)

Der *Schwerpunkt* S eines *homogenen* Rotationskörpers, der durch Drehung einer Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse entsteht, liegt auf der *Drehachse* (hier also auf der x -Achse). Daher *verschwinden* die Schwerpunktskoordinaten y_S und z_S :

$$y_S = 0 \quad \text{und} \quad z_S = 0 \quad (\text{V-165})$$

Die x -Koordinate des Schwerpunktes lässt sich wie folgt berechnen:

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 dx = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx \quad (\text{V-166})$$

V_x : Rotationsvolumen, berechnet nach der Integralformel (V-125)

Rotation einer Kurve um die y-Achse

Analoge Formeln erhält man bei Drehung der Kurve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y-Achse (Bild V-86).

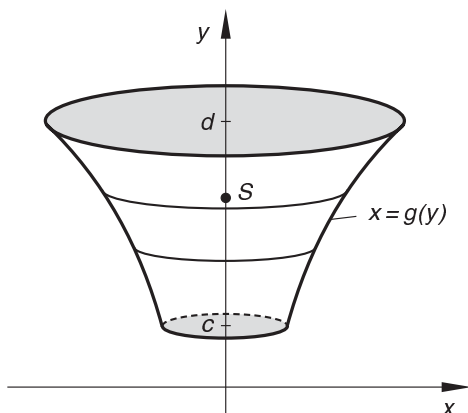


Bild V-86

Zur Berechnung des Schwerpunktes eines zur y-Achse symmetrischen homogenen Rotationskörpers

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers (Rotationsachse = y-Achse; Bild V-86)

Der *Schwerpunkt* S eines *homogenen* Rotationskörpers, der durch Drehung einer Kurve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y-Achse entsteht, liegt auf der *Drehachse* (hier also auf der y-Achse). Daher *verschwinden* die Schwerpunktskoordinaten x_S und z_S :

$$x_S = 0 \quad \text{und} \quad z_S = 0 \quad (\text{V-167})$$

Die y-Koordinate des Schwerpunktes lässt sich wie folgt berechnen:

$$y_S = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y x^2 dy = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y \cdot [g(y)]^2 dy \quad (\text{V-168})$$

V_y : Rotationsvolumen, berechnet nach der Integralformel (V-128)

Anmerkung

In der Regel liegt die Funktionsgleichung in der Form $y = f(x)$ vor und muss dann noch nach x aufgelöst werden $\rightarrow x = g(y)$.

■ Beispiele

- (1) Wo liegt der *Schwerpunkt* S des *homogenen* Drehkörpers, der durch Rotation der in Bild V-87 a) grau unterlegten Fläche um die x-Achse entsteht?

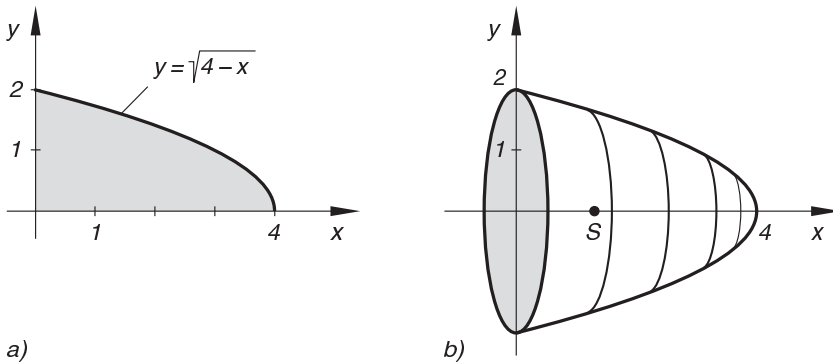


Bild V-87 Durch Drehung der Kurve $y = \sqrt{4-x}$, $0 \leq x \leq 4$ (Bild a)) um die x -Achse entsteht der in Bild b) skizzierte homogene Drehkörper

Lösung: Aus Symmetriegründen ist $y_S = z_S = 0$. Für die Berechnung der Schwerpunktskoordinate x_S benötigen wir noch das Rotationsvolumen V_x , für das uns die Integralformel (V-125) den folgenden Wert liefert:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \cdot \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \\ &= \pi(16 - 8) = 8\pi \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Schwerpunktskoordinate x_S nach der Formel (V-166)

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{\pi}{8\pi} \cdot \int_0^4 x(\sqrt{4-x})^2 dx = \frac{1}{8} \cdot \int_0^4 x(4-x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{1}{8} \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{1}{8} \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{96 - 64}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt S des Rotationskörpers besitzt demnach die Koordinaten $x_S = 4/3$, $y_S = 0$ und $z_S = 0$.

- (2) Durch Rotation des in Bild V-88 skizzierten Geradenstücks um die x -Achse entsteht ein (homogener) gerader Kreiskegel mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h .

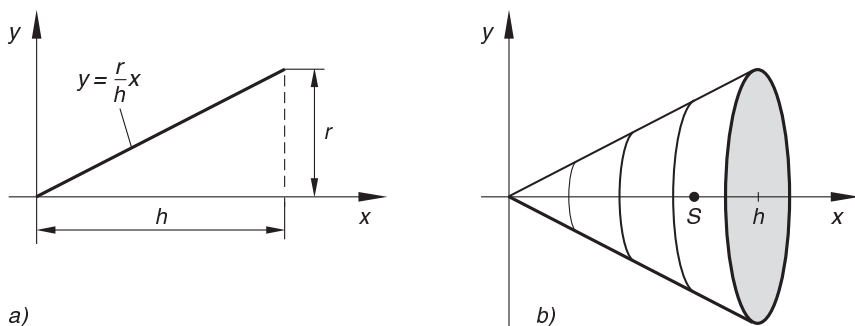


Bild V-88 Zur Berechnung des Schwerpunktes eines homogenen geraden Kreiskegels

- a) Geradenstück mit der Gleichung $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$
 b) Durch Rotation des Geradenstücks um die x -Achse erzeugter Kegel

Der Schwerpunkt S liegt aus *Symmetriegründen* auf der x -Achse, d. h. es gilt $y_S = z_S = 0$. Für die Koordinate x_S erhalten wir nach Formel (V-166) den folgenden Wert (das Kegelvolumen beträgt bekanntlich $V = \pi r^2 h/3$):

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{\frac{\pi}{3} r^2 h}{\pi r^2 h} \cdot \int_0^h x \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{3}{r^2 h} \cdot \int_0^h x \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \\ &= \frac{3}{r^2 h} \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^3 dx = \frac{3}{h^3} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^h = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{1}{4} h^4 = \frac{3}{4} h \end{aligned}$$

Der *Schwerpunkt des Kegels* liegt also auf der Symmetrieachse im Abstand $3h/4$ von der Kegelspitze (von der Grundfläche aus gemessen beträgt der Abstand $h/4$).

- (3) Wir berechnen die Lage des *Schwerpunktes einer homogenen Halbkugel* vom Radius r . Dieser Rotationskörper lässt sich durch Drehung der in Bild V-89 skizzierten *Viertelkreisfläche* um die y -Achse erzeugen.

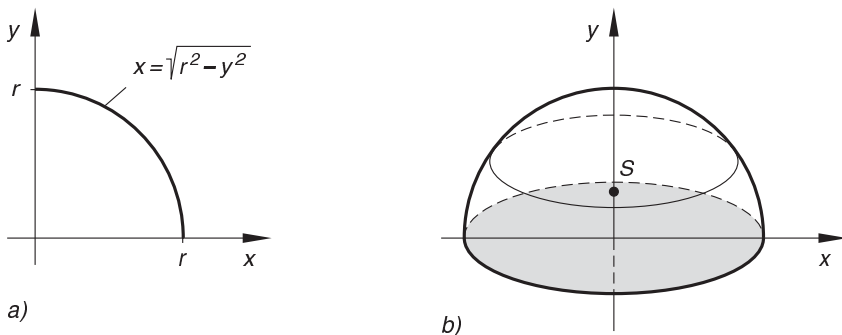


Bild V-89 Durch Rotation der in Bild a) gezeichneten Viertelkreislinie um die y -Achse entsteht die in Bild b) skizzierte homogene Halbkugel

Die Funktionsgleichung der rotierenden Kreislinie erhält man durch Auflösen der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ nach x :

$$x = g(y) = \sqrt{r^2 - y^2} \quad (0 \leq y \leq r)$$

Wegen der *Rotationssymmetrie* liegt der Schwerpunkt diesmal auf der *y-Achse*: $x_S = z_S = 0$. Für y_S liefert die Integralformel (V-168) den folgenden Wert (das Volumen einer Halbkugel ist bekanntlich $V = 2\pi r^3/3$):

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{\frac{\pi}{3} r^3}{\frac{\pi}{3} r^3} \cdot \int_0^r y \left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 dy = \frac{3}{2r^3} \cdot \int_0^r y (r^2 - y^2) dy = \\ &= \frac{3}{2r^3} \cdot \int_0^r (r^2 y - y^3) dy = \frac{3}{2r^3} \left[\frac{1}{2} r^2 y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^r = \\ &= \frac{3}{2r^3} \left(\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{4} r^4 \right) = \frac{3}{2r^3} \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{3}{8} r \end{aligned}$$

Der *Schwerpunkt einer Halbkugel* liegt daher auf der *Symmetrieachse* im Abstand von $3/8 r$ oberhalb der Grundfläche. ■

10.9 Massenträgheitsmomente

10.9.1 Grundbegriffe und einfache Beispiele

Massenträgheitsmomente treten im Zusammenhang mit *Drehbewegungen* von punktförmigen, flächenhaften oder räumlichen Massen auf. Sie spielen dort eine ähnliche Rolle wie die *Massen* bei *Translationsbewegungen*.

Ein Massenpunkt der Masse m besitze bezüglich einer vorgegebenen Drehachse (Bezugsachse) den *senkrechten* Abstand r (Bild V-90). Dann versteht man definitionsgemäß unter dem *Massenträgheitsmoment* J bezüglich dieser Achse das Produkt

$$J = r^2 m \quad (\text{V-169})$$

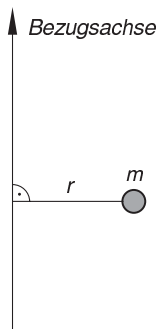


Bild V-90

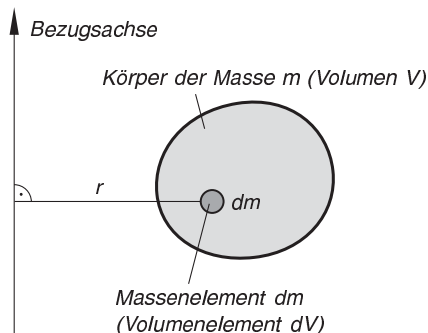


Bild V-91 Zum Begriff des Massenträgheitsmomentes eines räumlichen Körpers

Bei *kontinuierlichen* Massen wird der Körper in eine *große* Anzahl *infinitesimal kleiner* Massenelemente dm zerlegt. Jedes Massenelement dm steuert dann den Beitrag

$$dJ = r^2 dm \quad (\text{V-170})$$

zum *Gesamtmassenträgheitsmoment* J des Körpers bei (r ist der senkrechte Abstand des Massenelementes von der Bezugsachse, siehe hierzu Bild V-91). Durch *Summation*, d. h. *Integration* über *sämtliche* Beiträge dJ erhält man schließlich bei *homogener Massenverteilung*, d. h. konstanter Dichte ϱ und unter Berücksichtigung der Beziehung $dm = \varrho dV$ das Massenträgheitsmoment J des räumlichen Körpers:

Massenträgheitsmoment eines homogenen räumlichen Körpers (Bild V-91)

$$J = \int_{(m)} dJ = \int_{(m)} r^2 dm = \varrho \cdot \int_{(V)} r^2 dV \quad (\text{V-171})$$

Dabei bedeuten:

r : Senkrechter Abstand des Massenelementes dm bzw. Volumenelementes dV von der gewählten Bezugsachse

ϱ : Konstante Dichte des Körpers

Man beachte: Das Massenträgheitsmoment ist keine absolute Größe, sondern stets abhängig von der gewählten Bezugsachse (siehe hierzu auch den sog. *Satz von Steiner* im folgenden Abschnitt 10.9.2).

■ Beispiele

- (1) Für eine *homogene kreisförmige Scheibe* vom Radius R und der Dicke h ist das *Massenträgheitsmoment* J bezüglich der *Symmetrieachse* (Zylinderachse) zu berechnen (die konstante Dichte sei ϱ).

Lösung: Wir zerlegen zunächst die Scheibe in eine große Anzahl *konzentrischer Ringe* (Bild V-92).

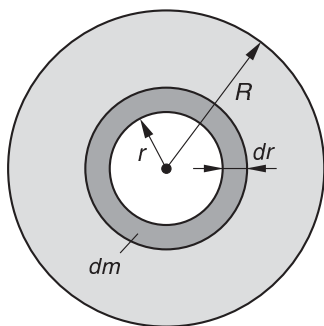


Bild V-92

Zur Berechnung des Massenträgheitsmomentes einer homogenen kreisförmigen Scheibe (Zerlegung in ringförmige Elemente)

Ein solcher *infinitesimal schmaler Ring* vom Innenradius r und der Breite dr (in Bild V-92 *dunkelgrau* unterlegt) besitzt die Querschnittsfläche

$$dA = 2\pi r dr$$

Begründung: Wenn man den Kreisring an einer Stelle aufschneidet und „gerade“ biegt, erhält man einen nahezu rechteckigen Streifen mit den Seitenlängen $2\pi r$ und dr .

Der Kreisring besitzt damit den Masseninhalte

$$dm = \varrho dV = \varrho (dA)h = \varrho (2\pi r dr)h = 2\pi\varrho hr dr$$

Sein Beitrag zum *Trägheitsmoment* J der Scheibe beträgt definitionsgemäß

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot 2\pi\varrho hr dr = 2\pi\varrho hr^3 dr$$

Durch Summation, d. h. *Integration* über alle zwischen $r = 0$ und $r = R$ gelegenen Ringelemente erhält man schließlich

$$J = \int_{(m)} dJ = 2\pi\varrho h \cdot \int_0^R r^3 dr = 2\pi\varrho h \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2} \pi\varrho h R^4$$

Beachtet man, dass die Scheibenmasse durch $m = \varrho V = \varrho \pi R^2 h$ gegeben ist, so lässt sich das Massenträgheitsmoment der Scheibe auch wie folgt durch Masse m und Radius R ausdrücken:

$$J = \frac{1}{2} \pi\varrho h R^4 = \frac{1}{2} \underbrace{(\varrho \pi R^2 h)}_m R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

- (2) Es ist das *Massenträgheitsmoment* eines *homogenen zylindrischen Stabes* bezüglich der *Schwerpunktachse* zu bestimmen, die *senkrecht* zur Stabachse verläuft (Bild V-93). Dabei wird vorausgesetzt, dass der Durchmesser des Stabes *klein* ist gegenüber der Stablänge (l : Stablänge; A : Querschnittsfläche des Stabes; ϱ : Konstante Dichte des Materials).

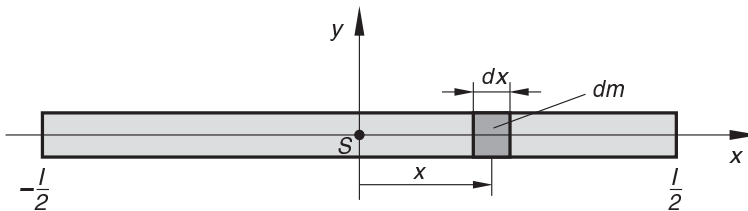


Bild V-93 Zur Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines homogenen Stabes (Zerlegung in Zylinderscheiben)

Lösung: Aus *Symmetriegründen* liegt der *Schwerpunkt* S in der Stabmitte. Wir wählen ihn daher als *Ursprung* des Koordinatensystems (Bild V-93). Die y -Achse ist dann die *Bezugsachse* (Schwerpunktachse).

Der Stab wird nun durch Schnitte senkrecht zur Stabachse in eine *große* Anzahl von *Zylinderscheiben* zerlegt. Ein solches *infinitesimal dünnes Scheibchen* der Dicke dx besitzt den Masseninhalt

$$dm = \varrho dV = \varrho A dx$$

und liefert damit zum *Gesamtträgheitsmoment* J den Beitrag

$$dJ = x^2 dm = x^2 \cdot \varrho A dx = \varrho A x^2 dx$$

Denn der Abstand dieser in Bild V-93 *dunkelgrau* unterlegten Scheibe von der gewählten Bezugsachse (y -Achse) ist durch die Koordinate x gegeben. Durch *Integration* sämtlicher zwischen $x = -l/2$ und $x = l/2$ gelegener Elemente erhält man schließlich das gesuchte *Massenträgheitsmoment*²⁰⁾:

$$\begin{aligned} J &= \int_{(m)} dJ = \varrho A \cdot \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = 2\varrho A \cdot \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\varrho A \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{l/2} = \\ &= 2\varrho A \left[\frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 - 0 \right] = 2\varrho A \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} \varrho A l^3 \end{aligned}$$

Wir drücken das Massenträgheitsmoment J noch durch die Zylindermasse $m = \varrho V = \varrho A l$ und die Stablänge l aus und bekommen die aus der Mechanik bereits bekannte Formel

$$J = \frac{1}{12} \varrho A l^3 = \frac{1}{12} \underbrace{(\varrho A l)}_m l^2 = \frac{1}{12} m l^2$$

■

10.9.2 Satz von Steiner

Von besonderer Bedeutung sind in den Anwendungen Massenträgheitsmomente, die auf eine durch den *Körperschwerpunkt* S verlaufende Achse bezogen werden (sog. *Schwerpunktachsen*). Trägheitsmomente dieser Art werden im Folgenden durch das Symbol J_S gekennzeichnet. Ist nun das Trägheitsmoment J_S (bezogen auf eine bestimmte Schwerpunktachse) bekannt, so lässt sich daraus mit Hilfe einer von *Steiner* stammenden Bezie-

²⁰⁾ Aus Symmetriegründen können wir die Integration auf das Intervall von $x = 0$ bis $x = l/2$ beschränken (Faktor 2).

hung das Trägheitsmoment J_A bezüglich einer zur gewählten Schwerpunktsachse *parallel* verlaufenden Bezugsachse A wie folgt berechnen (Bild V-94):

Satz von Steiner für Massenträgheitsmomente (Bild V-94)

$$J_A = J_S + m d^2 \quad (\text{V-172})$$

Dabei bedeuten:

J_S : Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf eine (spezielle) *Schwerpunktsachse* S

J_A : Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf eine zu dieser speziellen Schwerpunktsachse S *parallele* Bezugsachse A

m : Masse des homogenen Körpers

d : Abstand der beiden (parallelen) Achsen

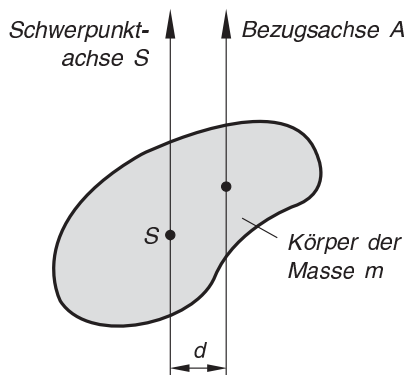


Bild V-94 Zum Satz von Steiner

Anmerkungen

- (1) Der Summand $m d^2$ im Steinerschen Satz ist das Massenträgheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse m bezüglich der neuen Bezugsachse A .
- (2) Der Satz von Steiner ermöglicht die Berechnung eines Massenträgheitsmomentes bezüglich einer (beliebigen) Achse A , wenn das Trägheitsmoment bezüglich der zu A parallelen Schwerpunktsachse S bekannt ist.
- (3) Verschiebt man eine Schwerpunktsachse parallel zu sich selbst, so *vergrößert* sich das Massenträgheitsmoment. Das Massenträgheitsmoment hat somit seinen *kleinsten* Wert, wenn die Bezugsachse durch den Schwerpunkt geht (im Vergleich zu allen Parallelachsen).

■ Beispiel

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir das Massenträgheitsmoment J_S eines homogenen zylindrischen Stabes der Länge l bezüglich einer *Schwerpunktachse* senkrecht zur Stabachse berechnet:

$$J_S = \frac{1}{12} m l^2$$

Jetzt interessieren wir uns für das Massenträgheitsmoment J_A des gleichen Stabes bezüglich einer zu dieser Schwerpunktachse *parallelen* Bezugsachse durch einen der beiden *Endpunkte* des Stabes (neue Bezugsachse ist die y -Achse, siehe Bild V-95).

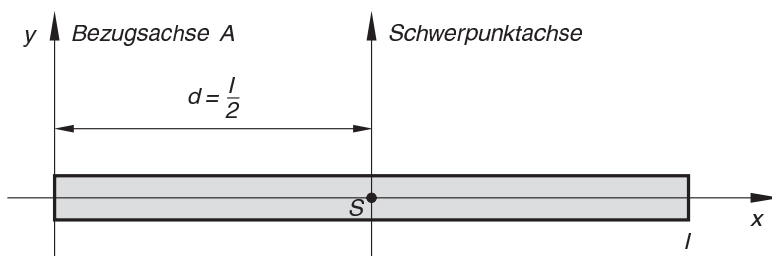


Bild V-95 Anwendung des Steinerschen Satzes auf einen homogenen Zylinderstab

Der Abstand der beiden Achsen beträgt $d = l/2$. Aus dem *Steinerschen Satz* folgt dann:

$$\begin{aligned} J_A &= J_S + m d^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) m l^2 = \frac{1+3}{12} m l^2 = \frac{4}{12} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2 \end{aligned}$$

Das Massenträgheitsmoment hat sich demnach bei der Achsenverschiebung *vervierfacht!* ■

10.9.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers

Rotation einer Kurve um die x -Achse

Wir betrachten einen *homogenen Rotationskörper*, der durch Drehung des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse entstanden ist und zerlegen ihn wiederum in der bereits bekannten Weise in eine *große* Anzahl *dünnere* Scheiben (siehe hierzu auch Bild V-56). Ein solches Zylinderscheibchen der Dicke dx erhält man, wenn man das in Bild V-96 skizzierte (*grau* unterlegte) Rechteck mit den Seitenlängen y und dx um die x -Achse rotieren lässt.

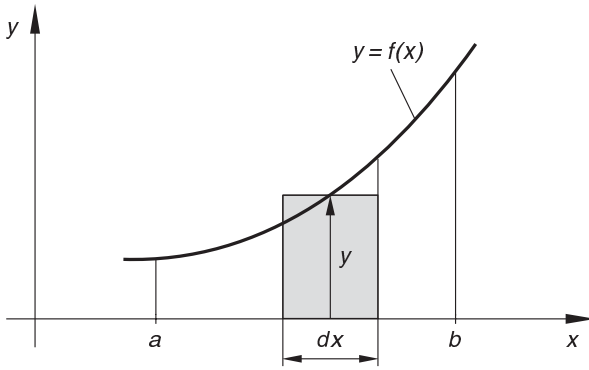


Bild V-96 Zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes eines zur x -Achse symmetrischen homogenen Rotationskörpers bezüglich dieser Achse

Für das *Massenträgheitsmoment* einer Zylinderscheibe haben wir in Abschnitt 10.9.1, Beispiel (1) bereits den Formelausdruck

$$J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} m R^2 \quad (\text{V-173})$$

hergeleitet (m : Zylindermasse; R : Radius der kreisförmigen Grundfläche). Aus dieser Formel erhält man den Beitrag dJ_x , den unser Zylinderscheibchen zum Trägheitsmoment J_x , des Rotationskörpers beisteuert, mit Hilfe der *formalen Substitutionen*

$$R \rightarrow y = f(x) \quad \text{und} \quad m \rightarrow dm \quad (\text{V-174})$$

Es ist also

$$dJ_x = \frac{1}{2} (dm) y^2 = \frac{1}{2} y^2 dm \quad (\text{V-175})$$

Das Massenelement dm lässt sich noch durch die Dichte ϱ des homogenen Körpers und das Volumenelement $dV = \pi y^2 dx$ ausdrücken ($dm = \varrho dV$). Dies führt zu dem Ausdruck

$$dJ_x = \frac{1}{2} y^2 dm = \frac{1}{2} y^2 (\varrho dV) = \frac{1}{2} y^2 \varrho \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \pi \varrho y^4 dx \quad (\text{V-176})$$

Durch *Summation*, d. h. *Integration* über die Beiträge *sämtlicher* zwischen $x = a$ und $x = b$ liegender Scheibchen erhält man schließlich für das *Massenträgheitsmoment* J_x des Rotationskörpers den Formelausdruck

$$J_x = \int_{x=a}^{x=b} dJ_x = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_a^b y^4 dx = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_a^b [f(x)]^4 dx \quad (\text{V-177})$$

Wir fassen zusammen:

Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers (Rotations- und Bezugsachse: x -Achse; siehe hierzu auch Bild V-56 und Bild V-96)

Durch Drehung einer Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper, dessen *Massenträgheitsmoment* J_x bezüglich der *Rotationsachse* (d. h. hier der x -Achse) sich wie folgt berechnen lässt:

$$J_x = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_a^b y^4 dx = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_a^b [f(x)]^4 dx \quad (\text{V-178})$$

ϱ : Konstante Dichte des (homogen gefüllten) Rotationskörpers

Rotation einer Kurve um die y -Achse

Ein analoger Ausdruck lässt sich herleiten für das *Massenträgheitsmoment* J_y eines zur y -Achse rotationssymmetrischen homogenen Körpers, der durch Drehung der Kurve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y -Achse entstanden ist (siehe hierzu auch Bild V-57).

Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers (Rotations- und Bezugsachse: y -Achse; siehe hierzu auch Bild V-57)

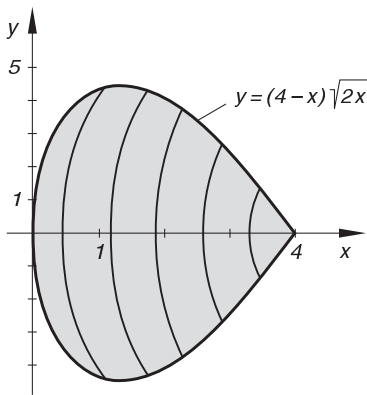
Durch Drehung einer Kurve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ um die y -Achse entsteht ein Rotationskörper, dessen *Massenträgheitsmoment* J_y bezüglich der *Rotationsachse* (d. h. hier der y -Achse) sich wie folgt berechnen lässt:

$$J_y = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_c^d x^4 dy = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_c^d [g(y)]^4 dy \quad (\text{V-179})$$

ϱ : Konstante Dichte des (homogen gefüllten) Rotationskörpers

■ **Beispiele**

- (1) Man berechne das *Massenträgheitsmoment* J_x eines homogenen stromlinienförmigen Körpers der *konstanten* Dichte ϱ , der durch Rotation der Kurve $y = (4 - x) \sqrt{2x}$ im Bereich ihrer beiden Nullstellen um die x -Achse entsteht (Bild V-97).

**Bild V-97**

Der skizzierte homogene Körper entsteht durch Drehung der Kurve $y = (4 - x) \sqrt{2x}$, $0 \leq x \leq 4$ um die x -Achse

Lösung: Wir berechnen zunächst die benötigten *Nullstellen* der Funktion:

$$y = 0 \Rightarrow (4 - x) \sqrt{2x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Unter Verwendung der Integralformel (V-178) erhalten wir dann für das gesuchte *Massenträgheitsmoment* zunächst:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_0^4 [(4 - x) \sqrt{2x}]^4 dx = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_0^4 (4 - x)^4 \cdot 4x^2 dx = \\ &= 2\pi \varrho \cdot \int_0^4 (4 - x)^4 \cdot x^2 dx \end{aligned}$$

Das Binom $(4 - x)^4$ entwickeln wir nach der aus Kap. I, Abschnitt 6 bekannten binomischen Formel (bitte nachrechnen):

$$(4 - x)^4 = (x - 4)^4 = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$$

Damit erhalten wir für das gesuchte Massenträgheitsmoment:

$$\begin{aligned} J_x &= 2\pi \varrho \cdot \int_0^4 (x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256) x^2 dx = \\ &= 2\pi \varrho \cdot \int_0^4 (x^6 - 16x^5 + 96x^4 - 256x^3 + 256x^2) dx = \\ &= 2\pi \varrho \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{8}{3} x^6 + \frac{96}{5} x^5 - 64x^4 + \frac{256}{3} x^3 \right]_0^4 = \\ &= 2\pi \varrho \left(\frac{1}{7} \cdot 4^7 - \frac{8}{3} \cdot 4^6 + \frac{96}{5} \cdot 4^5 - 64 \cdot 4^4 + \frac{256}{3} \cdot 4^3 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\varrho \left(\frac{1}{7} \cdot 4^7 - \frac{2}{3} \cdot 4^7 + \frac{6}{5} \cdot 4^7 - 4^7 + \frac{1}{3} \cdot 4^7 \right) = \\
&= 2 \cdot 4^7 \cdot \pi\varrho \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + \frac{6}{5} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \\
&= 2 \cdot 4^7 \cdot \pi\varrho \cdot \frac{15 - 70 + 126 - 105 + 35}{105} = \\
&= 2 \cdot 4^7 \cdot \pi\varrho \cdot \frac{1}{105} = \frac{2 \cdot 4^7}{105} \cdot \pi\varrho = 980,42 \cdot \varrho
\end{aligned}$$

- (2) Die Aufgabe besteht in der Berechnung des *Massenträgheitsmomentes einer homogenen Kugel* bezüglich eines beliebigen Kugeldurchmessers (Radius der Kugel: R ; Konstante Dichte: ϱ). Als Bezugsachse wählen wir den in die y -Achse fallenden Kugeldurchmesser. Aus *Symmetriegründen* können wir uns bei der Rechnung auf die in Bild V-89 skizzierte *Halbkugel* beschränken. Diese entsteht durch Rotation der im 1. Quadranten liegenden Viertelkreislinie mit der nach der Variablen x aufgelösten Funktionsgleichung

$$x = g(y) = \sqrt{R^2 - y^2} \quad (0 \leq y \leq R)$$

um die y -Achse. Für das Massenträgheitsmoment J_y der *Vollkugel* erhält man somit unter Verwendung der Integralformel (V-179) den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
J_y &= 2 \cdot \frac{1}{2} \pi\varrho \cdot \int_0^R (\sqrt{R^2 - y^2})^4 dy = \pi\varrho \cdot \int_0^R (R^2 - y^2)^2 dy = \\
&= \pi\varrho \cdot \int_0^R (R^4 - 2R^2y^2 + y^4) dy = \pi\varrho \left[R^4y - \frac{2}{3}R^2y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^R = \\
&= \pi\varrho \left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5 \right) = \pi\varrho R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \\
&= \pi\varrho R^5 \cdot \frac{15 - 10 + 3}{15} = \pi\varrho R^5 \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{15} \pi\varrho R^5
\end{aligned}$$

(der Faktor 2 tritt auf, weil wir uns bei der Integration auf eine *Halbkugel* beschränkt haben). Berücksichtigt man noch, dass Volumen V und Masse m einer Kugel durch die Formeln

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{und} \quad m = \varrho V = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi\varrho R^3$$

gegeben sind, so erhält man schließlich für das gesuchte *Massenträgheitsmoment einer Kugel*, bezogen auf einen (beliebigen) Kugeldurchmesser, die aus der Physik bekannte Formel

$$J_y = \frac{8}{15} \pi\varrho R^5 = \frac{2}{5} \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi\varrho R^3 \right)}_m R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

■

Übungsaufgaben

Hinweis: In den Abschnitten 1 bis 7 wurden die wichtigsten Grundbegriffe der Integralrechnung behandelt (Stammfunktion, bestimmtes und unbestimmtes Integral, Grundintegrale usw.). Dem Leser wird daher empfohlen, diese Abschnitte gründlich durchzuarbeiten, bevor er sich erstmals mit den nachfolgenden Übungsaufgaben auseinandersetzt.

Zu Abschnitt 1 bis 7

1) Bestimmen Sie *sämtliche* Stammfunktionen zu:

- a) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5$ b) $f(t) = 3 \cdot \sin t - 4 \cdot \cos t$
c) $f(t) = 2 \cdot e^t - \frac{5}{t} + 1$ d) $f(x) = \frac{1 - 2x^2 - 4x^3}{2x} + 3$
e) $f(z) = \frac{5}{3 + 3z^2} - \frac{1}{4}z^4$ f) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\cos^2 x}$
g) $f(u) = 3 \cdot \sin u - \frac{6}{u} + 7u^2$ h) $f(x) = -3 \cdot e^x - \cos x$

2) Lösen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale (Grundintegrale):

- a) $\int (e^x + x^2 - 2x + \sin x) dx$ b) $\int \left(10^x - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
c) $\int (2x - 3)^2 dx$ d) $\int 2 \cdot \cos x dx$
e) $\int \left(-\frac{3}{1 + t^2} - \frac{1}{t}\right) dt$ f) $\int \left(\frac{10}{\cosh^2 x} - 3 \cdot a^x - b \cdot \sin x\right) dx$
g) $\int \frac{5}{\sqrt{u^2 - 1}} du$ h) $\int \left(5 \cdot 3^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$
i) $\int \frac{\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$ j) $\int \sqrt{x\sqrt{x}} dx$
k) $\int \frac{\tan x}{\sin(2x)} dx$

3) Welchen Wert besitzen die folgenden bestimmten Integrale?

$$\text{a) } \int_0^4 (x^3 - 5x^2 + 1,5x - 10) dx \quad \text{b) } \int_1^e \frac{dt}{t} \quad \text{c) } \int_1^4 \frac{1 - z^2}{z} dz$$

$$\text{d) } \int_0^\pi (a \cdot \sin t - b \cdot \cos t) dt \quad \text{e) } \int_1^2 5 \cdot \sqrt{x} dx \quad \text{f) } \int_\pi^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$\text{g) } \int_0^2 3(1 - e^x) dx \quad \text{h) } \int_{0,5}^5 \frac{4}{t} dt \quad \text{i) } \int_0^{0,5} \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$\text{j) } \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{2 \cdot \cos^2 x} dx \quad \text{k) } \int_1^4 \frac{1 - u^2}{\sqrt{u}} du \quad \text{l) } \int_1^9 \sqrt{x} (2 - x) dx$$

4) Wie lautet die Funktionsgleichung der durch den Punkt $P_1 = (0; 2)$ verlaufenden Kurve mit der folgenden Ableitung?

$$y' = \sin x + 3 \cdot e^x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{1 + x^2}$$

5) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^a x^3 dx$ mit $a > 0$ als *Grenzwert der Obersumme* nach Definitionsgleichung (V-18).

Anleitung: Man unterteile das Integrationsintervall $0 \leq x \leq a$ mit Hilfe der Teilpunkte $x_k = k \cdot \frac{a}{n}$ mit $k = 0, 1, \dots, n$ in n gleiche Teile und verwende ferner die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- 6) Die im Folgenden aufgeführten Integralformeln haben wir einer *Integraltafel* entnommen. Zeigen Sie nach dem sog. „*Verifizierungsprinzip*“ die Gültigkeit dieser Beziehungen (die *Ableitung* der auf der rechten Seite stehenden Funktion $F(x)$ muss in diesem Fall zum Integrand $f(x)$ führen, d. h. es muss $F'(x) = f(x)$ gelten):

a) $\int e^{-x} (1 - x) dx = x \cdot e^{-x} + C$

b) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 4} - 2 \cdot \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C$

c) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C$

d) $\int \sin(3x) \cdot \cos(3x) dx = \frac{1}{6} \cdot \sin^2(3x) + C$

- 7) Zeigen Sie: $F_1(x) = x^2 \cdot e^x + 2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$. Wie lautet die *Gesamtheit* der Stammfunktionen?
- 8) Welchen Flächeninhalt schließt der Funktionsgraph von $y = -0,25x^2 + 4$ mit der x -Achse ein?
- 9) Berechnen Sie die im Intervall $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ unter der Kosinuskurve liegende Fläche.
- 10) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Parabel $y = -3(x - 2)^2 + 5$ und der x -Achse.
- 11) Für den *Zerfall einer radioaktiven Substanz* gilt:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n$$

Dabei ist n die Anzahl der zur *Zeit* t noch vorhandenen Atomkerne, $\lambda > 0$ die sog. *Zerfallskonstante*. Wie lautet das *Zerfallsgesetz* $n = n(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ genau n_0 Atomkerne vorhanden sind?

Zu Abschnitt 8

1) Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer *geeigneten Substitution*:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx & \text{b)} \int (5x+12)^{0,5} dx & \text{c)} \int \sqrt[3]{1-t} dt \\
 \text{d)} \int \frac{\arctan z}{1+z^2} dz & \text{e)} \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx & \text{f)} \int \frac{2x+6}{x^2+6x-12} dx \\
 \text{g)} \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} & \text{h)} \int x \cdot \sin(x^2) dx & \text{i)} \int \frac{3x^2-2}{2x^3-4x+2} dx \\
 \text{j)} \int_{-1}^1 \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{k)} \int_0^{\pi/2} \sin(3t - \pi/4) dt & \text{l)} \int_{-1}^1 \frac{5+x}{5-x} dx \\
 \text{m)} \int x^2 \cdot e^{x^3-2} dx & \text{n)} \int \frac{\tan(z+5)}{\cos^2(z+5)} dz & \text{o)} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx
 \end{array}$$

- 2) Lösen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{0,5} x \cdot \sqrt{1-x^2} dx$ mit Hilfe der *Variablen-substitution* $x = \sin u$.
- 3) Welchen Flächeninhalt schließt die Kurve $y = \sqrt{6-2x}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?
- 4) Zeigen Sie, dass sich das Integral $\int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}} dx$ mit Hilfe der *Substitution* $u = 1 + \sqrt{x}$ lösen lässt.
- 5) Lösen Sie die folgenden Integrale durch „*Partielle Integration*“:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int x \cdot \ln x dx & \text{b)} \int x \cdot \cos x dx & \text{c)} \int_1^5 \ln t dt \\
 \text{d)} \int x \cdot \sin(3x) dx & \text{e)} \int_0^{0,8} x \cdot e^x dx & \text{f)} \int \arctan x dx \\
 \text{g)} \int \sin^2(\omega t) dt
 \end{array}$$

- 6) Lösen Sie die folgenden Integrale durch *zweimalige partielle Integration*:

a) $\int e^x \cdot \cos x \, dx$ b) $\int x^2 \cdot e^{-x} \, dx$

- 7) Lösen Sie die folgenden Integrale durch *Partialbruchzerlegung* des Integranden:

a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx$ b) $\int \frac{4x^3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \, dx$

c) $\int \frac{3z}{z^3 + 3z^2 - 4} \, dz$ d) $\int \frac{4x - 2}{x^2 - 2x - 63} \, dx$

e) $\int \frac{2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, dx$

- 8) Berechnen Sie die zwischen den Kurven $y = \ln x$, $y = 0$ und $x = 5$ liegende Fläche.

- 9) Welchen Flächeninhalt schließt die Kurve mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x^2 - 4}{x - 5}$ mit der x -Achse ein (Skizze)?

- 10) Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer *geeigneten* Integrationsmethode:

a) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx$ b) $\int \cot x \, dx$ c) $\int x \cdot \cosh x \, dx$

d) $\int \sin x \cdot e^{\cos x} \, dx$ e) $\int \frac{x^3}{(x^2 - 1)(x + 1)} \, dx$ f) $\int_0^2 \frac{x - 4}{x + 1} \, dx$

g) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx$ h) $\int \frac{12x^2}{2x^3 - 1} \, dx$ i) $\int x \cdot \arctan x \, dx$

j) $\int \sqrt{x^2 - 2x} \, dx$ k) $\int \frac{x^2}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} \, dx$

- 11) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b beträgt $A = \pi a b$.

- 12) Welchen Wert besitzt das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx$ für

a) $m = n$, b) $m \neq n$ ($m, n \in \mathbb{N}$)?

Anleitung: Umformung des Integranden mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right).$$

- 13) Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ näherungsweise

a) nach der *Trapezformel*,

b) nach der *Simpsonschen Formel*

für jeweils 10 (einfache) Streifen.

- 14) Berechnen Sie die folgenden Integrale näherungsweise nach *Simpson* (n : Anzahl der Doppelstreifen):

a) $\int_1^4 \sqrt{1 + 2t^4} dt, \quad n = 10$ b) $\int_{0,5}^1 \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad n = 5$

c) $\int_1^3 \frac{e^x}{x^2} dx, \quad n = 5$

Zu Abschnitt 9

- 1) Bestimmen Sie den Wert der folgenden (*konvergenten*) *uneigentlichen* Integrale:

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$ c) $\int_{-\infty}^2 e^x dx$

- 2) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-ax} dx$ ($a > 0$) *konvergent* ist und den Wert $2/a^3$ besitzt.

- 3) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die drei Kurven mit den Funktionsgleichungen $y = e^{ax}$, $y = e^{-bx}$ und $y = 0$ miteinander einschließen ($a > 0$; $b > 0$; Skizze anfertigen).

- 4) Bestimmen Sie den Wert der folgenden *uneigentlichen* Integrale (falls sie existieren):

$$\text{a) } \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{c) } \int_0^{10} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

Zu Abschnitt 10

- 1) Bestimmen Sie das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ und das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ eines Fahrzeugs für den Fall

a) einer *konstanten* Bremsverzögerung $a = -2 \text{ m/s}^2$,

b) einer *periodischen* Bremsverzögerung $a = -(1 + \cos(\pi \text{ s}^{-1} \cdot t)) \text{ m/s}^2$,

wenn in beiden Fällen die Anfangsbedingungen wie folgt lauten: $s(0) = 0 \text{ m}$, $v(0) = 30 \text{ m/s}$.

- 2) Die Bewegungsgleichung eines Federpendels laute: $a(t) = -\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$. Gewinnen Sie hieraus durch *Integration* die *Geschwindigkeit-Zeit-Funktion* $v = v(t)$ und die *Weg-Zeit-Funktion* $s = s(t)$ für die Anfangswerte $s(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

- 3) Die Biegegleichung eines Balkens der Länge l , der in den beiden Endpunkten unterstützt wird, lautet bei *gleichmäßiger* Streckenlast F wie folgt:

$$y'' = -\frac{F}{2EI} (lx - x^2) \quad (0 \leq x \leq l)$$

(E : Elastizitätsmodul; I : Flächenmoment). Bestimmen Sie durch *Integration* dieser Gleichung die *Biegelinie* für die Randwerte $y(0) = 0$ und $y'(l/2) = 0$.

- 4) Die Fallgeschwindigkeit v eines aus der Ruhe heraus *frei* fallenden Körpers hängt bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes wie folgt von der Fallzeit t ab:

$$v = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} t\right) \quad (t \geq 0)$$

(g : Erdbeschleunigung; v_E : Endgeschwindigkeit). Bestimmen Sie durch *Integration* den Fallweg s als Funktion der Fallzeit t (zu Beginn sei $s(0) = 0$).

- 5) Welche Fläche schließt die Kurve $y = 4x(x^2 - 4)$ mit der x -Achse im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ ein?

- 6) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den Parabeln $y = x^2 - 2$ und $y = -x^2 + 2x + 2$.

- 7) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = x^2 - 2x - 1$ und der Geraden $y = 3x - 1$.
- 8) Berechnen Sie die von den Kurven $y = 2 \cdot \cosh x - 2$ und $y = -x^2 + 3$ eingeschlossene Fläche.
Hinweis: Bestimmung der Kurvenschnittpunkte *näherungsweise* nach dem *Newtonschen Tangentenverfahren*.
- 9) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Kreis $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ und der Parabel $y = x^2$.
- 10) Zeigen Sie, dass das durch Rotation der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die y -Achse entstandene *Rotationsellipsoid* das Volumen $V_y = 4\pi a^2 b/3$ besitzt.
- 11) Welches Volumen besitzt der Drehkörper, der durch Rotation des von der Kurve $y = (x - 2)^2 \cdot \sqrt{3}x$ und der x -Achse berandeten Flächenstücks um die x -Achse entsteht?
- 12) Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$ um die y -Achse entsteht ein *trichterförmiger* Drehkörper. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn er in der Höhe $y = 5$ abgeschnitten wird.
- 13) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $y = \sqrt{x^2 - 9}$, $3 \leq x \leq 5$
- a) um die x -Achse,
 - b) um die y -Achse
- entsteht.
- 14) Welche Länge besitzt ein Drahtseil, das gemäß der Funktion $y = 5 \cdot \cosh(x/5)$ (*Kettenlinie*) durchhängt, wenn beide Aufhängepunkte die gleiche Höhe und einen Abstand von 14,3 voneinander besitzen?
- 15) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = 4,2 \cdot \ln x^3$ im Intervall von $x = 1$ bis $x = e$.
- 16) Wie lang ist der Bogen des Funktionsgraphen von $y = x^{3/2}$ über dem Intervall $1 \leq x \leq 7,45$?
- 17) Bestimmen Sie die Länge des *Sinusbogens* über dem Intervall $[0, \pi]$.
Anleitung: Berechnung des Integrals nach der *Simpsonschen* Formel für $n = 10$ Doppelstreifen.
- 18) Berechnen Sie die Mantelfläche, die durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ um die y -Achse entsteht.

- 19) Welche Rotationsfläche (Mantelfläche) erzeugt die Kurve $y = \ln \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 3$ bei Drehung um die x -Achse? (Näherungsweise Berechnung des Integrals nach Simpson für $n = 10$ Doppelstreifen.)

- 20) Zeigen Sie: Durch Rotation des in Bild V-98 skizzierten Kreisabschnittes der Breite h um die x -Achse entsteht eine Kugelschicht der Dicke h mit der Mantelfläche $M_x = 2\pi r h$.

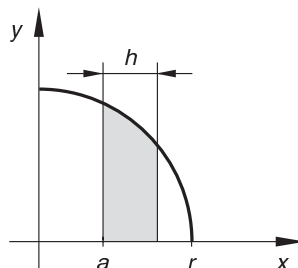


Bild V-98

- 21) Welche Arbeit muss aufgebracht werden, um eine dem Hookeschen Gesetz genügende elastische Stahlfeder mit der Federkonstanten $c = 8,45 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ um 17,3 cm zusammenzudrücken?

- 22) Für eine *adiabatische* Zustandsänderung eines *idealen* Gases gilt die *Poissonsche* Gleichung $p \cdot V^k = p_0 \cdot V_0^k = \text{constant}$. Berechnen Sie die Ausdehnungsarbeit

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV \quad \text{für ein solches Gas } (V_0, V_1: \text{Anfangs- bzw. Endvolumen}).$$

- 23) Ein *ideales* Gas besitzt im Ausgangszustand das Volumen $V_1 = 2,75 \text{ m}^3$ und den Druck $p_1 = 1250 \text{ N/m}^2$. Es wird *isotherm*, d. h. unter Konstanthaltung der Temperatur auf das Volumen $V_2 = 0,76 \text{ m}^3$ komprimiert. Welche Arbeit wurde dabei am Gas verrichtet?

- 24) Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{1 \text{ m} \cdot x}$ um die y -Achse entsteht ein trichterförmiger Behälter (vgl. hierzu auch Aufgabe 12). Er soll von einem Wasserreservoir aus bis zu einer Höhe von 5 m gefüllt werden. Berechnen Sie die erforderliche *Mindestarbeit* (Dichte des Wassers: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$).

Anleitung: Der Wasserpegel im Trichter habe die Höhe y erreicht. Um den Pegel geringfügig um dy zu erhöhen, muss die Wassermenge dm aus dem Reservoir ($y = 0$) in diese Höhe gebracht werden. Die dabei verrichtete Hubarbeit beträgt definitionsgemäß $dW = (dm) g y$ (siehe hierzu Bild V-99).

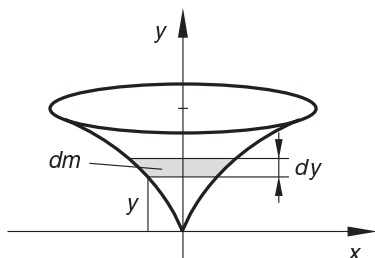
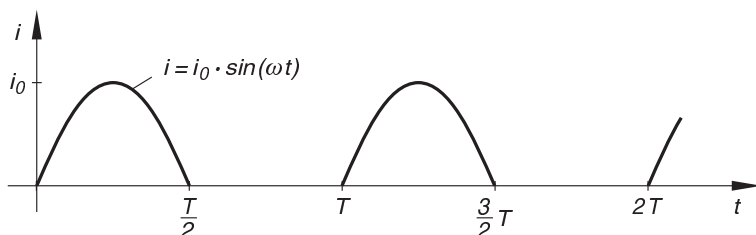


Bild V-99

- 25) Berechnen Sie den *linearen* und den *quadratischen Mittelwert* der Sinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq \pi$.
- 26) Ein *Einweggleichrichter* erzeuge den in Bild V-100 skizzierten Strom mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$. Berechnen Sie den *linearen Mittelwert* während einer Periode (er wird als *Gleichrichtwert* bezeichnet).

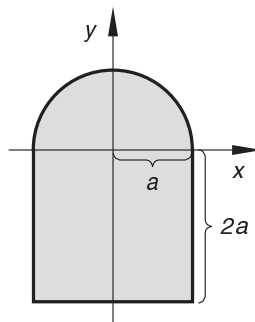
**Bild V-100**

- 27) In einem *Wechselstromkreis* erzeuge die Wechselspannung $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ den Wechselstrom $i(t) = i_0 \cdot \cos(\omega t)$. Berechnen Sie die *mittlere Leistung* P während einer Periode $T = 2\pi/\omega$ (*linearer Mittelwert*).

Hinweis: Für die *momentane Leistung* gilt definitionsgemäß $p(t) = u(t) \cdot i(t)$.

- 28) Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes der Fläche, die von den Parabeln mit den Funktionsgleichungen $y = -x^2$ und $y = x^2 - 4$ eingeschlossen wird.

- 29) Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt der in Bild V-101 skizzierten Figur (Quadrat mit aufgesetztem Halbkreis).

**Bild V-101**

- 30) Wo liegt der Schwerpunkt einer homogenen Viertelkreisfläche (Radius R)?
- 31) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Geraden $y = x + 2$ und der Parabel $y = x^2 - 4$ berandet wird.
- 32) Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$ um die x -Achse entsteht ein Drehkörper. Wo befindet sich der Schwerpunkt des Körpers?

- 33) Für den durch Drehung des im 1. Quadranten gelegenen Teils der Ellipse mit der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die y -Achse entstandenen Rotationskörper ist der Schwerpunkt zu bestimmen.
- 34) Wo liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ um die x -Achse entsteht?
- 35) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines homogenen *Rotationsellipsoids*, das durch Drehung der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die y -Achse entsteht (Dichte ϱ).
- 36) Für einen homogenen geraden *Kreiskegel* (Radius R , Höhe H , Dichte ϱ) ist das auf die Symmetrieachse bezogene Massenträgheitsmoment zu berechnen.
- 37) Berechnen Sie unter Verwendung des *Satzes von Steiner* das Massenträgheitsmoment eines homogenen *Vollzylinders* bezüglich einer *Mantellinie* (Zylinderhöhe H , Grundkreisradius R , Dichte ϱ).