Gruppen und Konjugationsklassen

Vortrag von Philipp Ranitzsch und Andreas Bick
im Proseminar zur Quantenmechanik II bei
Prof. Dr. Louis und Dr. Wohlfarth

1 Symmetrien in der Physik

Symmetrien spielen in der Physik eine große Rolle, da viele Systeme eine Symmetrie vorweisen. Zum Beispiel die Austauschinvarianz bei einem Quantenmechanischen System mit mehreren Elektronen oder die Rotationsinvarianz des Gravitationspotentials. Unter Symmetrie versteht man immer, dass der Hamiltonoperator oder klassisch die Energie invariant unter bestimmten Transformationen bleibt, zum Beispiel Spiegeln, Translation oder Rotation. Diese Transformationen bilden Gruppen.

Oft wird in der Klassischen Mechanik nicht die volle Symmetrie des Operators ausgeschöpft, da diese durch die Anfangsbedingungen gebrochen wird. Ein Beispiel dafür ist die elliptische Bewegung der Planeten, die in einer Ebene stattfindet. Die zugrundeliegende Symmetrie des Systems führt in diesem Fall zu der Drehimpulserhaltung und diese wiederum dazu, dass die Bahn in einer Ebene fixiert ist. Genauso ist der Runge Lenz Vektor Resultat der Symmetrie des Systems.

In quantenmechanischen Systemen ist es hingegen üblich, dass im Grundzustand die volle Symmetrie ausgeschöpft wird. Betrachtet man den Grundzustand des Wasserstoffatoms so ist dieser kugelsymmetrisch, genau wie das Potential $\propto \frac{1}{r}$.

2 Definition der Gruppe

Definition: Gruppe

Unter einer *Gruppe* G versteht man eine Menge von Elementen $\{a, b, \dots\}$ mit einer Verknüpfung $G \times G \to G, (a, b) \mapsto ab$ die folgende Gesetze erfüllt.

1. $a\,(bc) = (ab)\,c$

2. $\exists e \in G \;$ mit $\; ae = ea = a$

3. $\forall a \in G \exists a^{-1} \;$ mit $\; aa^{-1} = a^{-1}a = e$

4. $a, b \in G \Rightarrow ab \in G$

Definition: Abelsche Gruppe

Sind die Bedinungen der Gruppe erfüllt und zudem noch

$$ab = ba$$

nennt man die Gruppe eine *Abelsche Gruppe*.

Definition: Ordnung

Unter der *Ordnung* einer Gruppe G versteht man die Anzahl der in G enthaltenen Elemente.

3 Beispiele

Beispiel: $\mathbf{C_2}$

Diese Gruppe kann man sich als Rotation um π veranschaulichen.

$$C_2 = \{e, a\} \qquad a^2 = e$$

Diese Gruppe hat eine neutrales Element e und ein weiteres Element a mit dem Inversen $a^{-1} = a$ was dann einer entgegengesetzten Drehung zu der von a entspricht. Das Assoziativgesetz gilt trivial, genauso wie das Distributivgesetz. Damit ist C_2 eine Abelsche Gruppe der Ordnung 2.

Beispiel: $\mathbf{Z_n \bmod (n)}$

Unter der Gruppe $Z_n \bmod (n)$ versteht man die ganzen Zahlen $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit der Bedingung $\bmod (n)$ und einer additiven Verknüpfung.
Betrachtet man $Z_2 \bmod (2)$, so enthält diese die Elemente $\{0, 1\}$. Nun kann man leicht herausfinden, dass 0 das neutrale Element ist und berechnen.

$$0 + 1 \equiv 1 \bmod (2)$$
$$1 + 1 \equiv 0 \bmod (2)$$

Z_2 ist *isomorph* zu C_2. Darunter versteht man, dass die beiden Gruppen die gleiche Struktur haben, auch wenn sie andere Elemente und Verknüpfungen haben.

Gegenbeispiel: $\mathbb{Z}$

Betrachtet man die Menge der ganzen Zahlen mit einer multiplikativen Verknüpfung, so findet man kein inverses Element, da für $n \neq \pm 1$

$$\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}.$$

Gegenbeispiel: $\mathbb{R}$

Betrachtet man die Menge der reellen Zahlen mit einer multiplikativen Verknüpfung, so findet man für 0 kein inverses Element, da

$$0 \cdot x \stackrel{!}{=} 1$$

sich nicht erfüllen läßt. Dies ist somit auch keine Gruppe.

4 Allgemeinere Gruppen: $\mathbf{C_n}$ und $\mathbf{D_n}$

Die zyklische Gruppe $\mathbf{C_n}$

Unter der Gruppe C_n versteht man die zyklische Gruppe der Drehungen eines gleichseitigen n-seitigen Polygons mit gerichteten Seiten. Die Elemente dieses Gruppe entsprechen Drehungen um einen Winkel von

$$\frac{2\pi r}{n}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$

Diese Drehungen nennt man

$$C_n^r.$$

Einfacher ist es jedoch diese Drehungen als r-fache Ausführung einer Drehung $c \equiv C_n^1$ um $\frac{2\pi}{n}$ anzusehen. Dann gilt

$$c^r = C_n^r \qquad \text{und} \qquad c^n = e$$

Man sagt nun, dass die zyklische Gruppe der Ordnung n von c erzeugt wird, weil alle anderen Elemente aus der Gruppe durch mehrfaches Anwenden von c erzeugt werden können.

$$C_n = \mathrm{gp}\,\{c\}$$

Zudem ist die Gruppe noch abelsch, da

$$c^r c^s = c^{r+s} = c^{s+r} = c^s c^r$$

Die Gruppe $\mathbf{D_n}$

$\mathbf{D_3}$

Unter der Gruppe D_n versteht man die Symmetriegruppe gleichseitiger Polygone mit n ungerichteten Seiten. Bei D_3 handelt es sich also um ein Dreieck. Wir definieren Drehungen, wobei wir unter O den Mittelpunkt, unter X, Y, Z jeweils den Schnittpunkt einer Seitenhalbierenden mit der jeweiligen Seite verstehen wollen:

$$\begin{array}{rl} c & \text{Drehung in der Ebene des Dreiecks um } \dfrac{2\pi}{3} \text{ rechtsherum} \\ c^{-1} & \text{Drehung in der Ebene des Dreiecks um } \dfrac{2\pi}{3} \text{ linksherum} \\ b_1 & \text{Drehung des Dreiecks um die Achse } OX \text{ um } \pi \\ b_2 & \text{Drehung des Dreiecks um die Achse } OY \text{ um } \pi \\ b_3 & \text{Drehung des Dreiecks um die Achse } OZ \text{ um } \pi \end{array}$$

Bei den Drehungen um b_i muss beachtet werden, dass diese im Raum fixiert bleiben. Man findet nun heraus, dass man b_2 und b_3 durch Nacheinanderausführen von $b_i \equiv b$ und c erzeugen kann. Man kann einfach sehen, dass gilt

$$\begin{aligned} b_2 &= cbc^{-1}, \\ b_2 &= bc \end{aligned}$$

Analoge Beziehungen kann man auch für b_3 finden indem man ebenfalls b_3 durch b und c ausdrückt. Man kann diese Gruppe also aus zwei Elementen erzeugen, muss aber beachten wie diese zusammen wirken. Dazu setzt man b_2 gleich.

$$\begin{aligned} bc &= cbc^{-1} \\ \Leftrightarrow bc^2 &= cb \end{aligned}$$

Dann betrachtet man den Ausdruck

$$(bc)^2 = bcbc = b\,(cb)\,c = b\left(bc^2\right)c = b^2c^3 = e.$$

c^3 und b^2 entspricht jeweils einer Drehung um 2π. Nun kennen wir die Erzeugenden der Gruppe und können zusammenfassen

$$D_3 = \mathrm{gp}\{b, c\}, \qquad (bc)^2 = c^3 = b^2 = e.$$

$\mathbf{D_n}$

Verallgemeinert man die Ergebnisse aus der Betrachtung von D_3 auf D_n so erhält man eine Struktur der Form

$$D_n = \mathrm{gp}\,\{c, b\} \qquad c^n = b^2 = (bc)^2 = e$$

mit den $2n$ Elementen

$$\left\{e, c, c^2, \ldots, c^{n-1}, b, bc, bc^2, \ldots, bc^{n-1}\right\}$$

5 Die Permutationsgruppe $\mathbf{S_n}$

Die Permutationsgruppe ist ein weiteres Beispiel für Gruppen, mit dem sich Symmetrien und physikalische Systeme beschreiben lassen. Primär zu nennen sind hierbei Systeme mit identischen Teilchen, wie Elektronen in Vielelektronensystemen.

Des weiteren spielt die Permutationsgruppe in der Theorie der abgeschlossenen Gruppen im Satz von Cayley eine besondere Rolle. Diesem ist jedoch ein eigenes Kapitel gewidmet.

Permutation

Definition einer Permutation:

Einem Index i wird ein eindeutiger Index p_i zugeordnet:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

Verknüpfung

Die Verküpfung zwischen zwei Permutationen wird am besten am folgenden Beispiel gezeigt: Die obere Zeile der ersten Permutation wird nach der unteren Zeile der zweiten Permutation geordnet und anschließend werden die erste Zeile der zweiten und die zweite Zeile der ersten Permutation zu einer neuen Permutation, dem Ergebnis, zusammengefasst:

$$P \circ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gruppeneigenschaften

G1: Assoziativität

Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Hintereinanderausführung von Abbildungen bei Permutationsverknüpfungen.

G2: Neutrales Element

Bei dem neutralen Element wird dem Index i der gleiche Index i zugeordnet:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

G3: Inverses

Beim Inversen Element einer Permutation sind die obere und untere Zeile vertauscht:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Kommutativität

Bei Permutationen ist die Kommutativität im allgemeinen nur bei n ≤ 2 gegeben, da S_2 nur aus den zwei Elementen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese können ohne große Probleme als kommutativ nachgewiesen werden.

Ab $\mathbf{S_3}$ gilt dies, wie gesagt nicht allgemein, wie man an dem folgenden Beispiel zeigen kann:

$$Q \circ P \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P \circ Q$$

Ordnung

Die Permutationsgruppe $\mathbf{S_n}$ hat die Ordnung $n!$.

Zyklische Darstellung

Man kann Permutationen auf andere Art und Weise darstellen, so dass man vor allem weniger Schreibarbeit für die einzelnen Permutationen aufwenden muss. Wir werden hier die zyklische Schreibweise vorstellen.

Dafür wird die Permutation als erstes zyklisch geordnet. Man beginnt bei der 1 und schließt den der 1 zugeordneten Index an, bis man in einem Zyklus wieder die 1 erreicht. Anschließend wird mit den übrigen Indizes fortgefahren, bis keine mehr übrig sind.

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Permutation wird also in die zwei unabhängigen Zyklen $1 \to 2 \to 4 \to 1$ und $3 \to 3$ unterteilt.

Nun kann man bei den einzelnen Zyklen noch die untere Zeile weglassen, da sich diese aus den Zyklen direkt abgelesen werden kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

Wenn man nun noch die Gruppe kennt, deren Element wir betrachten (in unserem Beispiel S_4) kann man nun die Zyklen, in denen nur jede Zahl sich selbst zugeordnet wird ($i \longrightarrow i$) ebenfalls weglassen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Also kommen wir auf folgende Vereinfachung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Jede Permutation kann auf diese Weise geschrieben werden, was auch im weiteren so geschehen wird. Das neutrale Element wird in dieser Schreibweise als () geschrieben.

$$e \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \longrightarrow ()$$

Wie schon erwähnt, sind die einzelnen Zyklen voneinander unabhängig und kommutieren daher. Es ist es daher egal, in welcher Reihenfolge die

Zyklen geschrieben werden, auch wenn es üblich ist die Zyklen der Länge nach zu ordnen.

$$P(\in S_5) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}}_{\text{übliche Schreibweise}} = \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Beispiele zu Permutationsgruppen

$\mathbf{S_2}$

Sehr einfache Gruppe mit zwei Elementen:

$$\mathbf{S_2} = \{(), (1\ 2)\}$$

$\Rightarrow$ Ordnung $= 2$
Als Gruppe ist $\mathbf{S_2}$ identisch zu C_2:

$$e = () \qquad c = (1\ 2) \qquad c^2 = (1\ 2)(1\ 2) = () = e$$

$\mathbf{S_3}$

Ordnung $= \ 3! \ = \ 6$
Bestehend aus den Elementen:

$$\mathbf{S_3} = \{(), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

In diesem Fall ist $\mathbf{S_3}$ isomorph zu dem schon genannten Beispiel $\mathbf{D_3}$:
Den Erzeugenden c und b werden Elemente aus $\mathbf{S_3}$ zugeordnet:

$$\begin{aligned} c = (1\ 2\ 3) \qquad &; \qquad b = (2\ 3) \\ \Rightarrow bc = (2\ 3)(1\ 2\ 3) \quad &= \quad (1\ 3) = b_2 \end{aligned}$$

Und dann lassen sich die Elemente aus $\mathbf{S_3}$ genau den Elementen von $\mathbf{D_3}$ zuordnen:

$$\begin{aligned} &\{(), (2\ 3), (3\ 1), (1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \\ \leftrightarrow \qquad &\{e, b, bc, bc^2, c, c^2\} \end{aligned}$$

Diese Isomorphie in den betrachteten Gruppen führt uns zu einem Satz, der sich eben mit der Isomorphie zur Permutationsgruppe $\mathbf{S_n}$ beschäftigt:

6 Satz von Cayley

Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbf{S_n}$.

Ein exakter Beweis kann unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Cayley` gefunden werden, es werden jedoch noch nicht eingeführte Begriffe verwendet, so dass ich hier nur probieren werde den Satz plausibel zu machen:

Jedes Element $\{a_i\} \in \mathbf{G}$ wird mit einem festen Element $g \in \mathbf{G}$ verknüpft.

$$\Rightarrow \{ga_1, ga_2, \ldots, ga_n\} \;=\; \{a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, \ldots, a_{\pi_n}\}$$

Das heißt, jedem $\{a_i\}$ wird ein neuer Wert $\{a_{\pi_i}\}$ zugeordnet, mit anderen Worten, die Elemente werden permutiert.

Nun kann man durch Betrachtung der Indices i und π_i jedem Element g eine genau bestimmte Permutation $\Pi(g)$ zugeordnet:

$$g \longrightarrow \Pi(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_n \end{pmatrix}$$

Jeder Index i und π_i kommt genau einmal vor, so dass es sich um eine wirkliche Permutation handelt.

Des weiteren sind ga_i, ebenso, wie die Permutationen $g \longrightarrow \Pi(g)$ eindeutig, wie sich einfach zeigen lässt:

$$\begin{aligned} ga_i &= ga_j \Leftrightarrow a_j = a_k \text{ durch linksseitige Multiplikation mit } g^{-1} \text{ und} \\ ga_i &= ga_i \Leftrightarrow g = g' \text{ durch rechtsseitige Multiplikation mit } a_i^{-1} \end{aligned}$$

Beispiel

Als Beispiel soll die schon erwähnte Gruppe $\mathbf{C_3}$ dienen:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{C_3} = \{e,\ c,\ c^2\} & ; & e = c * c^2 = c^3 \\ e = () & c = (1\ 2\ 3) & c^2 = (1\ 3\ 2) \\ \Leftrightarrow \Pi(e) = () \quad ; & \Pi(c) = (1\ 2\ 3) & ; \quad \Pi(c^2) = (1\ 3\ 2) \end{array}$$

Mit dieser Struktur ist $\mathbf{C_3}$ eine spezielle Untergruppe von $\mathbf{S_3}$, die als alternierende Gruppe $\mathbf{A_3}$ bezeichnet wird. Auf diese wird im folgenden etwas genauer eingegangen:

7 Die alternierende Gruppe $\mathbf{A_n}$

Als erstes müssen wir den Begriff der Transposition einführen, der einen einfachen 2-Zyklus beschreibt, durch den in einer Permutation nur zwei Elemente miteinander vertauscht werden.

Wie man nun leicht einsehen kann lässt sich jede Permutation mit r Elementen als Produkt aus insgesamt $r-1$ Transpositionen schreiben:

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_r \end{pmatrix} = (n_1\ n_2)(n_2\ n_3)\dots(n_{r-1}\ n_r)$$

Normalerweise ist eine solche Darstellung nicht sonderlich sinnvoll, da man die Informationen auch aus der wesentlich kürzeren ersten Darstellung ablesen kann. Durch diese Darstellung lässt sich Permutationen jedoch eine weitere Eigenschaft zuordnen, nämlich ob sie gerade oder ungerade sind.

Eine einzelne Transposition ist als ungerade definiert und dementsprechend kann man diese Eigenschaft hochrechnen, so dass gilt:

$$P \text{ mit r Elementen ist} \begin{cases} \text{gerade, wenn r ungerade ist} \\ \text{ungerade, wenn r gerade ist} \end{cases}$$

Die alternierende Gruppe $\mathbf{A_n}$ ist nun die Untergruppe zu $\mathbf{S_n}$ mit allen geraden Elementen aus $\mathbf{S_n}$.

8 Konjugation und Konjugationsklassen

Konjugation

In einer Gruppe $(\mathbf{G}, \circ)$ sind $a, b \in \mathbf{G}$ konjugiert, wenn $c \in \mathbf{G}$ existiert mit $b = gag^{-1}$.

Hierbei heißt die Abbildung $a \mapsto gag^{-1}$ Konjugation mit g und ist ein bijektiver Homomorphismus, oder Automorphismus (siehe späterer Vortrag).

g wird dabei als konjugierendes Element bezeichnet.

Bevor wir jedoch weiter auf die Konjugation eingehen, werden wir Äquivalenzrelationen erklären, da es sich bei Konjugation um ein Beispiel für diese handelt.

Äquivalenz unterliegt 3 Bedingungen:

(i)	reflexiv:	$a \sim a$
(ii)	symmetrisch:	$a \sim b \Rightarrow b \sim a$
(iii)	transitiv:	$a \sim b; b \sim c \Rightarrow a \sim c$

In Worten:

(i) Jedes Element ist äquivalent zu sich selbst
(ii) Äquivalenz zwischen zwei Elementen gilt immer in beide Richtungen
(iii) Äquivalenz lässt sich fortpflanzen

Äquivalenz in Gruppen

(i) $a \sim a$ lässt sich durch konjugation mit e erreichen

$$a = eae^{-1}$$

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ lässt sich mit Hilfe des Inversen des Konjugationselementes erreichen:

$$\begin{aligned} a &= gbg^{-1} \\ g^{-1}ag &= g^{-1}gbg^{-1}g \\ g^{-1}ag &= b \end{aligned}$$

Wenn also a mit dem Element g zu b konjugiert ist, so ist b mit dem Element g^{-1} zu a konjugiert.

(iii) $a \sim b; b \sim c \Rightarrow a \sim c$ lässt sich ähnlich, wie (ii) erreichen:

$$a = gbg^{-1} \quad ; \quad b = hch^{-1}$$

einsetzen von b in a

$$\begin{aligned} a &= ghch^{-1}g^{-1} \\ a &= (gh)c(h^{-1}g^{-1}) \\ a &= (gh)c(gh)^{-1} \end{aligned}$$

Das heißt, wenn a mit dem Element g zu b und b mit dem Element h zu c konjugiert ist, so ist a mit dem Element gh zu c konjugiert.

Als Beispiel sollen die drei Operationen b_1, b_2, b_3 der Gruppe D_2 dienen. Es handelt sich hierbei um Drehungen eines Dreiecks, jeweils um π, jedoch um die verschiedenen Achsen OX, OY, OZ. Wie schon vorher gezeigt gilt:

$$b_2 = cb_1c^{-1}$$

Ähnliche Zusammenhänge lassen sich auch für die anderen Operationen finden, so dass man sagen kann, dass b_1, b_2, b_3 äquivalent, bzw. zueinander konjugiert sind.

$$b_1 \sim b_2 \sim b_3$$

Sie bilden also eine sog. Konjugationsklasse.

Konjugationsklassen

Für die Konjugationsklassen müssen wir wieder erst Äquivalenzklassen einführen, um diese dann auf Gruppen und Konjugationen anzuwenden:

Eine Menge zerfällt unter einer Äquivalenzrelation in disjunkte Äquivalenzklassen. Dabei werden als Äquivalenzklasse zu a, (a) geschrieben, alle Elemente zusammengefasst, die zu a äquivalent sind:

$$(a) = \{b | b \sim a\}$$

Anschließend wird ein weiteres Element $c \notin (a)$ gesucht und (c) aufgebaut, bis alle Elemente untergebracht sind.

Im Fall von Gruppen unterteilen wir diese nun in Konjugationsklassen, so dass für die Konjugationsklasse $(a), a \in \mathbf{G}$ gilt:

$$(a) = \{b | b = gag^{-1} \text{ mit } g \in G\}$$

Hier soll mal wieder die Gruppe $\mathbf{D_3}$ als Beispiel dienen:

$$\mathbf{D_3} = \{e, b, bc, bc^2, c, c^2\}$$

Die Konjugationsklassen sind:

(e)	mit $geg^{-1} = e$	(keine Rotation)
(c, c^2)	mit z.B. $bcb^{-1} = b(cb) = b(bc^2) = c^2$	(Rotation um $\frac{2\pi}{3}$)
(b, bc, bc^2)	$(= (b_1, b_2, b_3))$ s.o.	(Rotation um π)

Literatur

[1] H.F.Jones, *Groups, Representations and Physics.* Institute of Physics Publishing

[2] Die freie Enzyklopädie Wikipedia *http://de.wikipedia.org/*